

Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours “Mathématiques Appliquées” et “Actuariat”
Année 2024 - 2025

Durée : 1h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1 –

- 1) Donner les définitions précises des trois éléments composant un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- 2) Soient (E_1, \mathcal{E}_1) et (E_2, \mathcal{E}_2) deux espaces mesurables. Donner la définition d’une fonction mesurable $f : (E_1, \mathcal{E}_1) \rightarrow (E_2, \mathcal{E}_2)$.

Exercice 2 – On se place sur l’espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

- 1) Rappeler la définition de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ .

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d’éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On rappelle les définitions suivantes :

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \text{ et } \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

- 2) Donner les ensembles $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ pour la suite

$$A_n = \left] -\frac{2}{n+1}, 2 - \frac{1}{n+1} \right[.$$

- 3) Calculer la mesure de Lebesgue des ensembles $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$.

Exercice 3 – On lance simultanément deux dés équilibrés et indistinguables.

- 1) Modéliser cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- 2) Quelle est la probabilité de l’événement “obtenir deux chiffres pairs” ?

On introduit la fonction $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ qui à tout $\omega \in \Omega$ associe la somme des deux dés.

- 3) Quel est l’ensemble E des valeurs de la fonction X ?
- 4) Est-ce que X est une variable aléatoire ? Justifier correctement votre réponse.
- 5) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X^{-1}(\{2\}))$ et $\mathbb{P}(X^{-1}(\{3\}))$.

Exercice 4 – Soit la fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 & \text{si } x \in]-1, 0], \\ x - 1 & \text{si } x \in]0, 1[, \\ 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- 1) Quel est l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$?
- 2) Montrer que f est mesurable.