

Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours “Mathématiques Appliquées” et “Actuariat”
Année 2024 - 2025

Durée : 1h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1 –

- 1) Donner les définitions précises des trois éléments composant un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

L'ensemble Ω regroupe l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire. L'ensemble \mathcal{F} est une tribu des parties de Ω . C'est un ensemble contenant des sous-ensembles de Ω vérifiant les propriétés suivantes :

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

ii) Si $A \in \mathcal{F}$ alors $A^C \in \mathcal{F}$,

iii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dénombrable d'éléments de \mathcal{F} alors

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}.$$

Enfin \mathbb{P} est une mesure de probabilité c'est-à-dire une mesure telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. On rappelle qu'une mesure μ est une fonction de \mathcal{F} dans $[0, \infty]$ telle que

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

iii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dénombrable d'éléments disjoints de \mathcal{F} alors

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

- 2) Soient (E_1, \mathcal{E}_1) et (E_2, \mathcal{E}_2) deux espaces mesurables. Donner la définition d'une fonction mesurable $f : (E_1, \mathcal{E}_1) \rightarrow (E_2, \mathcal{E}_2)$.

L'application f est mesurable si pour tout $A \in \mathcal{E}_2$, on a $f^{-1}(A) = \{x \in E_1; f(x) \in A\} \in \mathcal{E}_1$.

Exercice 2 – On se place sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

- 1) Rappeler la définition de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ .

La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une tribu de parties de \mathbb{R} qui est engendrée par l'ensemble contenant tous les intervalles $[a, b]$.

La mesure de Lebesgue λ est entièrement caractérisée par ses valeurs sur les intervalles $[a, b]$. On a $\lambda([a, b]) = b - a$.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On rappelle les définitions suivantes :

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \text{ et } \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

2) Donner les ensembles $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ pour la suite

$$A_n = \left] -\frac{2}{n+1}, 2 - \frac{1}{n+1} \right[.$$

Les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle A_n sont croissantes. Ainsi,

$$\bigcup_{k \geq n} A_k = \left] -\frac{2}{n+1}, 2 \right[,$$

et donc

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{2}{n+1}, 2 \right[= [0, 2[.$$

De plus,

$$\bigcap_{k \geq n} A_k = \left[0, 2 - \frac{1}{n+1} \right[,$$

et donc

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 2 - \frac{1}{n+1} \right[= [0, 2[.$$

3) Calculer la mesure de Lebesgue des ensembles $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$. Evidemment on a

$$\lambda(\overline{\lim} A_n) = \lambda(\underline{\lim} A_n) = 2.$$

Exercice 3 – On lance simultanément deux dés équilibrés et indistinguables.

- 1) Modéliser cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Les dés étant indistinguables, on ne doit pas tenir compte de l'ordre des dés. Comme il peut y avoir répétition (deux fois le chiffre "1" par exemple), il y a 21 possibilités. On prend donc $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots\}$ où $(1,2)$ correspond au lancer pour lequel un dé tombe sur "1" et l'autre sur "2". Comme on l'a déjà mentionné, $\text{card}(\Omega) = 21$. L'ensemble Ω étant fini, on prend pour \mathcal{F} la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Enfin la mesure de probabilité est $\mathbb{P}(\{(i,i)\}) = 1/36$ pour $i \in \{1, \dots, 6\}$ et, pour $i \neq j$, $\mathbb{P}(\{(i,j)\}) = 1/18$. On vérifie bien que la somme des probabilités est égale à 1 car il y a 6 cas où les deux dés donnent le même résultat et 15 cas où les résultats sont différents ($6/36 + 15/18 = 1$).

- 2) Quelle est la probabilité de l'événement "obtenir deux chiffres pairs" ?
 Il faut tout d'abord répertorier les cas possibles : (2, 2), (4, 4), (6, 6), (2, 4), (2, 6) et (4, 6). Ainsi, la probabilité d'avoir deux chiffres pairs est

$$\frac{3}{36} + \frac{3}{18} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

On introduit la fonction $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ qui à tout $\omega \in \Omega$ associe la somme des deux dés.

- 3) Quel est l'ensemble E des valeurs de la fonction X ?
 L'ensemble des valeurs de X est évidemment $E = \{2, \dots, 12\}$.
- 4) Est-ce que X est une variable aléatoire ? Justifier correctement votre réponse.
 La tribu de l'ensemble de départ étant la plus grande tribu (celle contenant tous les sous-ensembles de Ω), on a nécessairement que X est mesurable c'est-à-dire une variable aléatoire.
- 5) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X^{-1}(\{2\}))$ et $\mathbb{P}(X^{-1}(\{3\}))$.
 La seule possibilité pour que la somme soit égale à 2 est d'avoir (1, 1). Ainsi,

$$\mathbb{P}(X^{-1}(\{2\})) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/36.$$

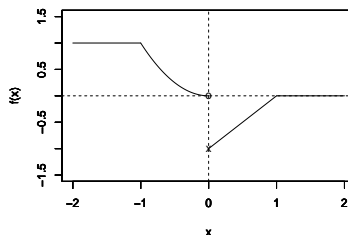
De même, la seule possibilité pour que la somme soit égale à 3 est d'avoir (1, 2). Ainsi,

$$\mathbb{P}(X^{-1}(\{3\})) = \mathbb{P}(X = 3) = 1/18.$$

Exercice 4 – Soit la fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 & \text{si } x \in]-1, 0], \\ x - 1 & \text{si } x \in]0, 1[, \\ 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- 1) Quel est l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$?
 On peut commencer par tracer la fonction f .



On remarque que $f^{-1}(\{0\}) = \{0\} \cup [1, \infty[$.

2) Montrer que f est mesurable.

Il suffit de montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a

$$f^{-1}(]-\infty, t]) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t \leq -1 \\]0, 1+t] & \text{si } t \in]-1, 0[, \\ [-\sqrt{t}, \infty[& \text{si } t \in [0, 1[, \\ \mathbb{R} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Tous ces ensembles appartenant bien à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a ainsi démontré la mesurabilité de f .