

Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours “Mathématiques Appliquées” et “Actuariat”
Année 2025 - 2026

Durée : 1h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Questions de cours – On considère l'espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \mu)$.

- 1) Donner la définition précise de l'élément $\mathcal{E}$ de l'espace mesuré.
- 2) Que doit satisfaire μ pour être une mesure sur $(E, \mathcal{E})$?
- 3) Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. Rappeler la définition de $\sigma(\mathcal{C})$, la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Exercice 1 – Soit $E = \{e_i; i \in \mathbb{N}\}$ et $A = \{e_{2i}; i \in \mathbb{N}\}$

- 1) Pour chacune des assertions ci-dessous, dire, en justifiant votre réponse, si elle est vraie ou fausse.

$$i) E \subset A; \quad ii) \{e_i\} \in A; \quad iii) e_2 \in E; \quad iv) \{e_2, e_3\} \subset A$$

- 2) Donner les éléments de la tribu $\mathcal{E} = \sigma(\{A\})$ de parties de E .
- 3) Soit la fonction $f : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (F, \mathcal{P}(F))$ définie pour tout $e_i \in E$ par $f(e_i) = 2\lceil i/2 \rceil - i$ où $\lceil x \rceil = \inf\{n \in \mathbb{Z}; x \leq n\}$.
 - i) Quel est l'ensemble F des valeurs prises par f ?
 - ii) La fonction f est-elle mesurable ? (justifier votre réponse).
 - iii) Reprendre les questions i) et ii) avec la fonction $f : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (F, \mathcal{P}(F))$ définie pour tout $e_i \in E$ par $f(e_i) = 3\lceil i/3 \rceil - i$.
- 4) On introduit l'application $\mu : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $\mu(A) = \inf\{i \in \mathbb{N}; e_i \in A\}$.
 - i) Quelle est la valeur de $\mu(\{e_2, e_7, e_1\})$?
 - ii) Montrer que μ n'est pas une mesure.

Exercice 2 – Un sac contient 3 boules rouges, 2 boules vertes et 1 boule bleue. Notez que les boules ne sont pas numérotées. On tire au hasard une boule du sac.

- 1) Proposer une modélisation $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de cette expérience aléatoire.
- 2) Quel est l'ensemble correspondant à l'événement “tirer une boule rouge ou une boule bleue”. Donner la probabilité de cet événement.

- 3) On a tiré la boule bleue. On effectue un second tirage sans avoir remis la boule bleue dans le sac. Modéliser cette nouvelle expérience aléatoire.

Exercice 3 – Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0, \\ 1+x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- 1) Donner les ensembles $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{2\})$ et $f^{-1}(]-\infty, 1])$.
- 2) Montrer, en utilisant le fait que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par l'ensemble des intervalles de la forme $]-\infty, t]$, que la fonction f est mesurable.

Exercice 4 – Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On rappelle les définitions suivantes :

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \text{ et } \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

- 1) Justifier que $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ sont des éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- 2) Quels sont les ensembles $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ lorsque

$$A_n = \left[0, 1 + \frac{\cos(n\pi)}{n+1} \right].$$