

Contrôle continu #1 de Probabilités

Correction
Année 2025 - 2026

Exercice 1 – Soit $E = \{e_i; i \in \mathbb{N}\}$ et $A = \{e_{2i}; i \in \mathbb{N}\}$

- 1) Pour chacune des assertions ci-dessous, dire, en justifiant votre réponse, si elle est vraie ou fausse.

$$i) E \subset A; \quad ii) \{e_i\} \in A; \quad iii) e_2 \in E; \quad iv) \{e_2, e_3\} \subset A$$

L'assertion i) est fausse car par exemple $e_3 \in E$ mais $e_3 \notin A$. L'assertion ii) est fausse aussi car $\{e_i\}$ est un sous ensemble de E et à ce titre ne peut pas être un élément de E et donc a fortiori de A . L'assertion iii) est vraie mais la iv) est fausse car $e_3 \notin A$.

- 2) Donner les éléments de la tribu $\mathcal{E} = \sigma(\{A\})$ de parties de E .
La tribu engendrée $\sigma(\{A\})$ est la plus petite tribu contenant A . On a donc $\mathcal{E} = \{\emptyset, E, A, A^C\}$.

- 3) Soit la fonction $f : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (F, \mathcal{P}(F))$ définie pour tout $e_i \in E$ par $f(e_i) = 2\lceil i/2 \rceil - i$ où $\lceil x \rceil = \inf\{n \in \mathbb{Z}; x \leq n\}$.

- i) Quel est l'ensemble F des valeurs prises par f ?
Il faut remarquer que si i est pair (i.e., $i = 2j$) alors $f(e_i) = 2j - i = 0$.
Si i est impair (i.e., $i = 2j + 1$) alors $f(e_i) = 2(j + 1) - 2j - 1 = 1$.
Ainsi, $F = \{0, 1\}$.

- ii) La fonction f est-elle mesurable ? (justifier votre réponse).
On a $\mathcal{P}(F) = \sigma(\{\{0\}, \{1\}\})$. Ainsi, pour montrer que f est mesurable, il suffit de vérifier que $f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{E}$ et $f^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{E}$. C'est bien le cas car $f^{-1}(\{0\}) = A \in \mathcal{E}$ et $f^{-1}(\{1\}) = A^C \in \mathcal{E}$.

- iii) Reprendre les questions i) et ii) avec la fonction $f : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (F, \mathcal{P}(F))$ définie pour tout $e_i \in E$ par $f(e_i) = 3\lceil i/3 \rceil - i$.
Il faut à présent considérer 3 cas : $i = 3j$, $i = 3j + 1$ et $i = 3j + 2$. Dans le premier cas, $f(e_i) = 0$. Dans le second, $f(e_i) = 2$ et enfin, dans le troisième cas, $f(e_i) = 1$. Ainsi, $F = \{0, 1, 2\}$. En revanche, $f^{-1}(\{0\}) = \{e_{3i}; i \in \mathbb{N}\} \notin A$. Donc f n'est pas mesurable.

- 4) On introduit l'application $\mu : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $\mu(A) = \inf\{i \in \mathbb{N}; e_i \in A\}$.

- i) Quelle est la valeur de $\mu(\{e_2, e_7, e_1\})$?
On a $\mu(\{e_2, e_7, e_1\}) = 1$.

ii) Montrer que μ n'est pas une mesure.

Il suffit de remarquer que μ n'est pas σ -additive. En effet on a par exemple

$$\mu(\{e_1, e_2\} \cup \{e_3, e_4\}) = 1 \neq \mu(\{e_1, e_2\}) + \mu(\{e_3, e_4\}) = 1 + 3 = 4.$$

Exercice 2 – Un sac contient 3 boules rouges, 2 boules vertes et 1 boule bleue. Notez que les boules ne sont pas numérotées. On tire au hasard une boule du sac.

1) Proposer une modélisation $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de cette expérience aléatoire.

On a $\Omega = \{R, V, B\}$, où l'élément R correspond au tirage d'une boule rouge parmi les 3, etc. On prend évidemment $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et enfin, la probabilité $\mathbb{P}$ est définie par

$$\mathbb{P}(\{R\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad \mathbb{P}(\{V\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}(\{B\}) = \frac{1}{6}.$$

2) Quel est l'ensemble correspondant à l'événement "tirer une boule rouge ou une boule bleue". Donner la probabilité de cet événement.

Cet événement est l'ensemble $\{R, B\}$ et on a

$$\mathbb{P}(\{R, B\}) = \mathbb{P}(\{R\}) + \mathbb{P}(\{B\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

3) On a tiré la boule bleue. On effectue un second tirage sans avoir remis la boule bleue dans le sac. Modéliser cette nouvelle expérience aléatoire.

On a cette fois-ci $\Omega = \{R, V\}$. On prend encore $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et enfin, la probabilité $\mathbb{P}$ est définie par

$$\mathbb{P}(\{R\}) = \frac{3}{5} \text{ et } \mathbb{P}(\{V\}) = \frac{2}{5}.$$

Exercice 3 – Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0, \\ 1+x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1) Donner les ensembles $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{2\})$ et $f^{-1}(]-\infty, 1])$.

En s'aidant de la représentation graphique de la fonction f , on trouve les ensembles $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1\}$, $f^{-1}(\{2\}) = \{-2, 1\}$ et $f^{-1}(]-\infty, 1]) = [-1, 0]$.

- 2) Montrer, en utilisant le fait que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par l'ensemble des intervalles de la forme $] - \infty, t]$, que la fonction f est mesurable.

Pour montrer que f est mesurable, il suffit donc de montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f^{-1}(] - \infty, t]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On considère 3 cas. Si $t < 0$, $f^{-1}(] - \infty, t]) = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si $t \in [0, 1]$, $f^{-1}(] - \infty, t]) = [-t, 0] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Enfin, si $t > 1$, $f^{-1}(] - \infty, t]) = [-t, t - 1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 4 – Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On rappelle les définitions suivantes :

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \text{ et } \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

- 1) Justifier que $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ sont des éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Ce sont des éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme unions et intersections dénombrables d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- 2) Quels sont les ensembles $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ lorsque

$$A_n = \left[0, 1 + \frac{\cos(n\pi)}{n+1} \right].$$

Commençons par la limite supérieure. Posons

$$B_n := \bigcup_{k \geq n} A_k$$

Si n est pair, le plus grand ensemble parmi $\{A_k; k \geq n\}$ est $A_n = [0, 1 + 1/(n+1)]$. Si n est impair, le plus grand ensemble parmi $\{A_k; k \geq n\}$ est $A_n = [0, 1 + 1/(n+2)]$. Ainsi,

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = [0, 1].$$

Intéressons nous à présent à la limite inférieure. On pose

$$B_n := \bigcap_{k \geq n} A_k$$

Si n est pair, le plus petit ensemble parmi $\{A_k; k \geq n\}$ est $A_n = [0, 1 - 1/(n+2)]$. Si n est impair, le plus petit ensemble parmi $\{A_k; k \geq n\}$ est $A_n = [0, 1 - 1/(n+1)]$. Ainsi,

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = [0, 1[.$$