Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques

Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"

Semestre 6 − Année 2024 - 2025

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 – Soit $U : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on introduit la variable aléatoire

$$V_k := \sum_{i=1}^{k} i \mathbb{I}_{](i-1)/k, i/k]}(U).$$

1) Quelle est l'expression de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(V_k \mid U)$?

2) Montrer l'égalité entre les événements $\{V_k = i\}$ et $\{U \in](i-1)/k, i/k]\}$.

3) Déterminer la loi de V_k et calculer $\mathbb{E}(V_k)$.

4) Montrer que pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$ on a $\mathbb{E}(U \mid \{V_k = j\}) = (2j-1)/(2k)$.

5) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(U \mid V)$ ainsi que sa loi.

6) Quelle est la valeur de $\mathbb{E}[\mathbb{E}(U \mid V)]$?

Exercice 2 – Soit $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ un vecteur aléatoire de loi absolument continue admettant pour densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = c\mathbb{I}_{\Delta}(x,y),$$

avec $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2y \leq 1\}$.

1) Représenter l'ensemble Δ.

2) Quelle est la valeur de c. Justifier votre réponse.

3) Donner l'expression de la densité de X ainsi que celle de Y.

4) Calculer l'espérance de X.

5) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

6) En déduire que $\mathbb{E}(Y) = (1 + \mathbb{E}(X))/4$.

Exercice 3 – Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ et $T_n = S_n - X_1$.

1) Quelle est la loi de T_n. Justifier votre réponse.

2) Montrer que (presque-sûrement) $X_1 \mathbb{I}_{\{0\}}(S_n) = 0$ et que $X_1 \mathbb{I}_{\{k\}}(S_n) = \mathbb{I}_{\{1\}}(X_1)\mathbb{I}_{\{k-1\}}(T_n)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

3) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X_1 \mid S_n)$.