

Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours “Mathématiques Appliquées” et “Actuariat”
Semestre 6 – Année 2024 - 2025

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1 – Soit $U : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on introduit la variable aléatoire

$$V_k := \sum_{i=1}^k i \mathbb{I}_{[(i-1)/k, i/k]}(U).$$

- 1) Quelle est l'expression de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(V_k | U)$? La variable aléatoire V_k est une fonction mesurable de U donc elle est $\sigma(U)$ -mesurable. Ainsi, $\mathbb{E}(V_k | U) = V_k$.
- 2) Montrer l'égalité entre les événements $\{V_k = i\}$ et $\{U \in [(i-1)/k, i/k]\}$.
C'est évident car pour que V_k soit égal à i , il faut que le i ème terme de la somme soit non nul donc que $U \in [(i-1)/k, i/k]$.
- 3) Déterminer la loi de V_k et calculer $\mathbb{E}(V_k)$.
La variable aléatoire V_k prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, k\}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a $\mathbb{P}(V_k = i) = \mathbb{P}(U \in [(i-1)/k, i/k]) = 1/k$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(V_k) = \sum_{i=1}^k \frac{i}{k} = \frac{k(k+1)}{2k} = \frac{k+1}{2}.$$

- 4) Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ on a $\mathbb{E}(U | \{V_k = j\}) = (2j-1)/(2k)$.
On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U | \{V_k = j\}) &= \frac{1}{\mathbb{P}(V_k = j)} \int_{\{V_k = j\}} U d\mathbb{P} = k \int_{\Omega} U \mathbb{I}_{[(j-1)/k, j/k]}(U) d\mathbb{P} \\ &= k \int_{(j-1)/k}^{j/k} u du = \frac{k}{2} [u^2]_{(j-1)/k}^{j/k} = \frac{2j-1}{2k}. \end{aligned}$$

- 5) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(U | V_k)$ ainsi que sa loi.
D'après le cours,

$$\mathbb{E}(U | V_k) = \sum_{j=1}^k \mathbb{E}(U | \{V_k = j\}) \mathbb{I}_{\{V_k = j\}} = \frac{2V_k - 1}{2k}.$$

- 6) Quelle est la valeur de $\mathbb{E}[\mathbb{E}(U | V_k)]$?
On a

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(U | V_k)] = \frac{2\mathbb{E}(V_k) - 1}{2k} = 1/2 = \mathbb{E}(U).$$

Exercice 2 – Soit $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi absolument continue admettant pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = c \mathbb{I}_{\Delta}(x, y),$$

avec $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2y \leq 1\}$.

- 1) Représenter l'ensemble Δ .

C'est l'ensemble des points du rectangle $[0, 1] \times [0, 1/2]$ compris au-dessus de la droite d'équation $y = x/2$. On a donc

$$\mathbb{I}_{\Delta}(x, y) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\mathbb{I}_{[x/2, 1/2]}(y) = \mathbb{I}_{[0, 1/2]}(y)\mathbb{I}_{[0, 2y]}(x).$$

- 2) Quelle est la valeur de c . Justifier votre réponse.

Pour que la densité soit positive, il faut que $c > 0$. De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy = c \int_0^{1/2} \int_0^{2y} dx dy = c \int_0^{1/2} 2y dy = \frac{c}{4}.$$

Il faut donc prendre $c = 4$ pour que $f_{(X,Y)}$ soit une densité.

- 3) Donner l'expression de la densité de X ainsi que celle de Y .

La densité de X est

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dy = 4\mathbb{I}_{[0,1]}(x) \int_{x/2}^{1/2} dy = 2(1-x)\mathbb{I}_{[0,1]}(x).$$

La densité de Y est

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dx = 4\mathbb{I}_{[0, 1/2]}(y) \int_0^{2y} dx = 8y\mathbb{I}_{[0, 1/2]}(y).$$

- 4) Calculer l'espérance de X .

On a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_0^1 2x(1-x) dx = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

- 5) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(Y | X)$.

D'après le cours, on sait que $\mathbb{E}(Y | X) = h(X)$ avec, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X=x}(y) dy,$$

où

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{4\mathbb{I}_{[x/2, 1/2]}(y)}{2(1-x)} = \frac{2}{1-x}\mathbb{I}_{[x/2, 1/2]}(y).$$

Ainsi,

$$h(x) = \frac{1}{1-x} \int_{x/2}^{1/2} 2y dy = \frac{1}{1-x} [y^2]_{x/2}^{1/2} = \frac{1-x^2}{4(1-x)} = \frac{1+x}{4}.$$

- 6) En déduire que $\mathbb{E}(Y) = (1 + \mathbb{E}(X))/4$.

Il suffit de remarquer que

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y | X)] = \frac{1 + \mathbb{E}(X)}{4}.$$

Exercice 3 – Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $S_n := X_1 + \dots + X_n$ et $T_n = S_n - X_1$.

1) Quelle est la loi de T_n . Justifier votre réponse.

On a $T_n = X_2 + \dots + X_n$ donc T_n suit une loi binomiale de paramètres $n - 1$ et p comme somme de $n - 1$ variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre p .

2) Montrer que (presque-sûrement) $X_1 \mathbb{I}_{\{0\}}(S_n) = 0$ et que $X_1 \mathbb{I}_{\{k\}}(S_n) = \mathbb{I}_{\{1\}}(X_1) \mathbb{I}_{\{k-1\}}(T_n)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Tout d'abord, si l'indicatrice vaut 1 alors $S_n = 0$ et donc $X_1 = 0$. Ainsi, $X_1 \mathbb{I}_{\{0\}}(S_n) = 0$. De plus, pour $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{I}_{\{k\}}(S_n) = \mathbb{I}_{\{X_1=0, T_n=k\}} + \mathbb{I}_{\{X_1=1, T_n=k-1\}}$$

Donc

$$X_1 \mathbb{I}_{\{k\}}(S_n) = 0 \times \mathbb{I}_{\{X_1=0, T_n=k\}} + 1 \times \mathbb{I}_{\{X_1=1, T_n=k-1\}} = \mathbb{I}_{\{X_1=1, T_n=k-1\}}.$$

3) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X_1 \mid S_n)$.

D'après le cours, on a

$$\mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(X_1 \mid S_n = k) \mathbb{I}_{\{S_n=k\}}.$$

Or, $\mathbb{E}(X_1 \mid S_n = 0) = 0$ car si $S_n = 0$, on a nécessairement que $X_1 = 0$. De plus pour $k \in \{1, \dots, n\}$, en utilisant la question 2),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1 \mid S_n = k) &= \frac{1}{\mathbb{P}(S_n = k)} \int_{\{S_n=k\}} X_1 d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}(S_n = k)} \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\{X_1=1\}} \mathbb{I}_{\{T_n=k-1\}} d\mathbb{P} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1, T_n = k - 1)}{\mathbb{P}(S_n = k)} = \frac{k}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \mathbb{I}_{\{S_n=k\}} = \frac{S_n}{n}.$$