

Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours “Mathématiques Appliquées” et “Actuariat”
Année 2025 - 2026

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Questions de cours – Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire intégrable.

- 1) Si $\mathcal{A}$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$, donner la définition de “ X est une variable aléatoire $\mathcal{A}$ mesurable”.
- 2) Quelles sont les propriétés que doit vérifier la variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A})$?
- 3) Donnez l’expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(\exp(\sin^2(X)) \mid \cos^2(X))$ en justifiant correctement votre réponse.

Exercice 1 – Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et Y une loi de Bernoulli de paramètre $p/2$. On pose $Z = 2X - Y$.

- 1) Quelle est la loi de Z ?
- 2) Donnez l’expression, en fonction de p , de l’espérance de Z . Vous donnerez le résultat sous sa forme la plus simple possible.
- 3) Donnez l’expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid Z)$.
- 4) Donnez l’expression de la fonction mesurable $h : \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle $\mathbb{E}(Y \mid Z) = h(Z)$.

Exercice 2 – Soit $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi continue de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = cy \cos(x) \mathbb{I}_{\Delta}(x, y),$$

avec $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \pi/2] \text{ et } \cos(x) \leq y \leq 1\}$. On rappelle que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et que la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus.

- 1) Représentez l’ensemble Δ .
- 2) Quelle est la valeur de la constante c ? Justifiez votre réponse.
- 3) En notant $\arccos$ la réciproque de la fonction cosinus sur $[0, \pi/2]$, donnez l’expression de la densité de Y .

- 4) Donnez l'expression de la densité de X .
- 5) Donnez l'expression de la fonction mesurable $h : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(Y | X) = h(X)$.

Exercice 3 – Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle que la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ est donnée pour $x > 0$ par $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$. Soit $N : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ une variable aléatoire telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On supposera dans la suite que N est indépendante de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$.

- 1) Donnez les expressions de $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_1^2)$ en fonction de λ .

On rappelle que si Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes, alors, pour toutes fonctions mesurables g et h telles que $g(Y)h(Z)$ est une variable aléatoire intégrable, on a $\mathbb{E}(g(Y)h(Z)) = \mathbb{E}(g(Y))\mathbb{E}(h(Z))$.

Dans la suite on pose $S_N := Y_1 + \cdots + Y_{N+1}$ avec $Y_i := X_i - \lambda^{-1}$.

- 2) Montrez que

$$\mathbb{E}(S_N^2 | N) = a(\lambda)N + b(\lambda),$$

où vous préciserez l'expression de $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$.

- 3) Donnez l'expression, en fonction de λ , de $\mathbb{E}(S_N^2)$.