

Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques

Parcours “Mathématiques Appliquées” et “Actuariat”

Année 2025 - 2026

Correction

Exercice 1 – Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et Y une loi de Bernoulli de paramètre $p/2$. On pose $Z = 2X - Y$.

- 1) Quelle est la loi de Z ?

Remarquons tout d’abord que Z prend ses valeurs dans l’ensemble $\{-1, 0, 1, 2\}$.

On a

$$\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(X = 0; Y = 1) = p(1 - p)/2,$$

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X = 0; Y = 0) = (1 - p)(1 - p/2)$$

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1; Y = 1) = p^2/2,$$

$$\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(X = 1; Y = 0) = p(1 - p/2).$$

- 2) Donnez l’expression, en fonction de p , de l’espérance de Z . Vous donnerez le résultat sous sa forme la plus simple possible.

En utilisant la question précédente, on a

$$\mathbb{E}(Z) = -\frac{p}{2}(1 - p) + \frac{p^2}{2} + 2p\left(1 - \frac{p}{2}\right) = \frac{3p}{2}.$$

- 3) Donnez l’expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid Z)$.

La variable aléatoire Z étant discrète, on a

$$\mathbb{E}(X \mid Z) = \sum_{i=-1}^2 \mathbb{E}(X \mid \{Z = i\}) \mathbb{I}_{\{i\}}(Z).$$

Or, si $Z = -1$, on a $X = 0$. Si $Z = 0$, nécessairement $X = 0$. Si $Z = 1$ ou $Z = 2$ on a $X = 1$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X \mid Z) = \mathbb{I}_{\{1\}}(Z) + \mathbb{I}_{\{2\}}(Z).$$

- 4) Donnez l'expression de la fonction mesurable $h : \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle $\mathbb{E}(Y | Z) = h(Z)$.

On pouvait par exemple utiliser la question précédente en remarquant que $Z = 2X - Y$ et donc que $\mathbb{E}(Y | Z) = 2\mathbb{E}(X | Z) - Z$. Comme $Z = -\mathbb{I}_{\{-1\}}(Z) + \mathbb{I}_{\{1\}}(Z) + 2\mathbb{I}_{\{2\}}(Z)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y | Z) &= 2\mathbb{I}_{\{1\}}(Z) + 2\mathbb{I}_{\{2\}}(Z) + \mathbb{I}_{\{-1\}}(Z) - \mathbb{I}_{\{1\}}(Z) - 2\mathbb{I}_{\{2\}}(Z) \\ &= \mathbb{I}_{\{-1\}}(Z) + \mathbb{I}_{\{1\}}(Z).\end{aligned}$$

Exercice 2 – Soit $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi continue de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = cy \cos(x) \mathbb{I}_{\Delta}(x, y),$$

avec $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \pi/2] \text{ et } \cos(x) \leq y \leq 1\}$. On rappelle que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et que la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus.

- 1) Représentez l'ensemble Δ .
L'ensemble Δ est inclus dans le carré $[0, \pi/2] \times [0, 1]$. C'est la partie située sur la courbe de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.
- 2) Quelle est la valeur de la constante c ? Justifiez votre réponse.
Il faut tout d'abord que $c > 0$ pour que la fonction soit strictement positive sur Δ . Il faut de plus que

$$c \int_{\mathbb{R}^2} y \cos(x) \mathbb{I}_{\Delta}(x, y) dy dx = 1.$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} y \cos(x) \mathbb{I}_{\Delta}(x, y) dy dx &= \int_0^{\pi/2} \int_{\cos(x)}^1 y \cos(x) dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(x) (1 - \cos^2(x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(x) \sin^2(x) dx = \frac{1}{6} [\sin^3(x)]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Il faut donc prendre $c = 6$.

- 3) En notant $\arccos$ la réciproque de la fonction cosinus sur $[0, \pi/2]$, donnez l'expression de la densité de Y .
On remarque tout d'abord que $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\arccos(y), \pi/2] \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$. Ainsi,

$$f_Y(y) = 6y \mathbb{I}_{[0,1]}(y) \int_{\arccos(y)}^{\pi/2} \cos(x) dx = 6y (1 - \sin(\arccos(y))) \mathbb{I}_{[0,1]}(y).$$

- 4) Donnez l'expression de la densité de X .

On a

$$f_X(x) = 6 \cos(x) \mathbb{I}_{[0, \pi/2]}(x) \int_{\cos(x)}^1 y dy = 3 \cos(x) \sin^2(x) \mathbb{I}_{[0, \pi/2]}(x).$$

On vérifie facilement que c'est bien une fonction d'intégrale égale à 1.

- 5) Donnez l'expression de la fonction mesurable $h : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(Y | X) = h(X)$.

Pour $x \in [0, \pi/2]$, la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ est

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{6y \cos(x)}{3 \cos(x) \sin^2(x)} \mathbb{I}_{[\cos(x), 1]}(y) = \frac{2y}{\sin^2(x)} \mathbb{I}_{[\cos(x), 1]}(y).$$

Ainsi, pour $x \in [0, \pi/2]$,

$$h(x) = \frac{2}{\sin^2(x)} \int_{\cos(x)}^1 y^2 dy = \frac{2(1 - \cos^3(x))}{3 \sin^2(x)}.$$

Exercice 3 – Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle que la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ est donnée pour $x > 0$ par $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$. Soit $N : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ une variable aléatoire telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On supposera dans la suite que N est indépendante de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$.

- 1) Donnez les expressions de $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_1^2)$ en fonction de λ .

On peut utiliser directement le cours pour dire que $\mathbb{E}(X_1) = 1/\lambda$. La densité d'une loi exponentielle de paramètre λ est $x \mapsto \lambda \exp(-\lambda x) \mathbb{I}_{\{x > 0\}}$.

On a donc,

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda \exp(-\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty y^2 \exp(-y) dy = \frac{2}{\lambda^2}.$$

On rappelle que si Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes, alors, pour toutes fonctions mesurables g et h telles que $g(Y)h(Z)$ est une variable aléatoire intégrable, on a $\mathbb{E}(g(Y)h(Z)) = \mathbb{E}(g(Y))\mathbb{E}(h(Z))$.

Dans la suite on pose $S_N := Y_1 + \dots + Y_{N+1}$ avec $Y_i = X_i - \lambda^{-1}$.

- 2) Montrez que

$$\mathbb{E}(S_N^2 | N) = a(\lambda)N + b(\lambda),$$

où vous préciserez l'expression de $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$.

La variable aléatoire N étant discrète, on a

$$\mathbb{E}(S_N^2 | N) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(S_N^2 | \{N = k\}) \mathbb{I}_{\{k\}}(N).$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_N^2 | \{N = k\}) &= \frac{1}{\mathbb{P}(N = k)} \int_{\Omega} S_N^2 \mathbb{I}_{\{N=k\}} d\mathbb{P} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(N = k)} \int_{\Omega} S_k^2 \mathbb{I}_{\{N=k\}} d\mathbb{P} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(N = k)} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} Y_i Y_j \mathbb{I}_{\{N=k\}} \right). \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses d'indépendance et la linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(S_N^2 | \{N = k\}) = \frac{k+1}{\lambda^2},$$

puisque $\mathbb{E}(Y_i Y_j) = \delta_{ij}/\lambda^2$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(S_N^2 | N) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k+1}{\lambda^2} \mathbb{I}_{\{k\}}(N) = \frac{N+1}{\lambda^2}.$$

On a donc montré le résultat attendu avec $a(\lambda) = b(\lambda) = 1/\lambda^2$.

- 3) Donnez l'expression, en fonction de λ , de $\mathbb{E}(S_N^2)$.
On sait que

$$\mathbb{E}(S_N^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(S_N^2 | N)) = E \left(\frac{N+1}{\lambda^2} \right) = \frac{1+\lambda}{\lambda^2},$$

puisque N suit une loi de Poisson de paramètre λ et donc $\mathbb{E}(N) = \lambda$.