Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2021 - 2022

Durée : 1h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Questions de cours –

1) Soit E un ensemble quelconque. Donner la définition d'une tribu $\mathcal{E}$ de parties de E.

2) Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Donner la définition d'une mesure μ définie sur $\mathcal{E}$.

3) Soient $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$ deux espaces mesurables et soit $f : E_1 \to E_2$ une fonction. Quelle propriété doit vérifier cette fonction pour être une fonction mesurable ?

Exercice 1 – Les fonctions ci-dessous sont-elles mesurables ? Vous devez justifier votre réponse.

1) $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

2) $f : (\{a, b, c\}, \mathcal{P}(\{a, b, c\})) \to (\{1, 2, 3\}, \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}))$ définie par $f(a) = 1$, $f(b) = 2$ et $f(c) = 3$.

3) $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) + \pi(\cos(x))^2$.

4) $f : (\{a, b, c\}, \sigma(\{\{b\}\}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$ définie par $f(a) = 0$, $f(b) = f(c) = 1$.

5) $f : (\{a, b, c\}, \sigma(\{\{b\}\}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$ définie par $f(b) = 0$, $f(a) = f(c) = 1$.

Exercice 2 – On considère l'ensemble $E = \{0, 1, a, b\}$. Donner l'ensemble des éléments des tribus de parties de E suivantes : $\sigma(\{\{0\}\})$; $\sigma(\{\{0\}, \{a\}\})$ et $\sigma(\{\{0, a\}\})$.

Exercice 3 – On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer 3 fois de manière indépendante une pièce de monnaie équilibrée i.e., telle que la probabilité pour la pièce de tomber sur son côté "pile" est identique à celle de tomber du côté "face".

1) Modéliser cette expérience aléatoire par un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où Ω est un ensemble de cardinal 8.

2) Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\})$ la fonction définie pour tout $\omega \in \Omega$ (c'est-à-dire pour tout résultat de 3 lancers de la pièce) par $X(\omega) = 1$ si le nombre de "pile" est supérieur au nombre de "face" (et $X(\omega) = 0$ sinon).

   a) La fonction X est-elle une variable aléatoire ? Justifier votre réponse.

   b) Donner la loi de probabilité de X.

3) Reprendre les questions 1) et 2) en supposant que la pièce a une probabilité de 1/3 de tomber du côté "pile".

Exercice 4 – On dispose d'un sac contenant 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire une boule du sac au hasard.

1) Modéliser cette expérience aléatoire par un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2) On introduit la fonction X définie pour tout résultat de l'expérience aléatoire par $X(\omega) = 1$ si le résultat ω est une boule verte et $X(\omega) = 2$ sinon. On munit l'ensemble d'arrivée de la plus grande tribu possible.

   a) La fonction X est-elle une variable aléatoire ? Justifier votre réponse.

   b) Ecrire X sous la forme d'une fonction étagée positive.

   c) Calculer l'intégrale

$$\int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$