Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Correction

Exercice 1 – Les fonctions ci-dessous sont-elles mesurables ? Vous devez justifier votre réponse.

1) $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.
<u>*Correction*</u> – *Cette fonction est mesurable. Pour le montrer, il suffit de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f^{-1}(\{n\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Or, $f^{-1}(\{n\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor = n\} = [n, n+1[$ qui est un intervalle et donc un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

2) $f : (\{a,b,c\}, \mathcal{P}(\{a,b,c\})) \to (\{1,2,3\}, \mathcal{P}(\{1,2,3\}))$ définie par $f(a) = 1$, $f(b) = 2$ et $f(c) = 3$.
<u>*Correction*</u> – *Cette fonction est mesurable car l'espace de départ est muni de la plus grande tribu, celle de l'ensemble des parties de $\{1,2,3\}$.*

3) $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) + \pi(\cos(x))^2$.
<u>*Correction*</u> – *Cette fonction est mesurable car c'est une fonction continue.*

4) $f : (\{a,b,c\}, \sigma(\{\{b\}\}) \to (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ définie par $f(a) = 0$, $f(b) = f(c) = 1$.
<u>*Correction*</u> – *Cette fonction n'est pas mesurable. En effet, $\sigma(\{\{b\}\}) = \{\emptyset, \{a,b,c\}, \{b\}, \{a,c\}\}$ et $f^{-1}(\{0\}) = \{a\} \notin \sigma(\{\{b\}\})$.*

5) $f : (\{a,b,c\}, \sigma(\{\{b\}\}) \to (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ définie par $f(b) = 0$, $f(a) = f(c) = 1$.
<u>*Correction*</u> – *Cette fonction est mesurable car $f^{-1}(\{0\}) = \{b\} \in \sigma(\{\{b\}\})$ et $f^{-1}(\{1\}) = \{a,c\} \in \sigma(\{\{b\}\})$.*

Exercice 2 – On considère l'ensemble $E = \{0, 1, a, b\}$. Donner l'ensemble des éléments des tribus de parties de E suivantes : $\sigma(\{\{0\}\})$; $\sigma(\{\{0\}, \{a\}\})$ et $\sigma(\{\{0, a\}\})$.
<u>*Correction*</u> – *Par définition d'une tribu engendrée on a :*

$$\sigma(\{\{0\}\}) = \{\emptyset, E, \{0\}, \{1, a, b\}\};$$

$$\sigma(\{\{0\}, \{a\}\}) = \{\emptyset, E, \{0\}, \{a\}, \{1, a, b\}, \{0, 1, b\}, \{0, a\}, \{1, b\}\};$$

et

$$\sigma(\{\{0, a\}\}) = \{\emptyset, E, \{0, a\}, \{1, b\}\}.$$

Exercice 3 – On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer 3 fois de manière indépendante une pièce de monnaie équilibrée i.e., telle que la probabilité pour la pièce de tomber sur son côté "pile" est identique à celle de tomber du côté "face".

1) Modéliser cette expérience aléatoire par un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où Ω est un ensemble de cardinal 8.
<u>*Correction*</u> – *L'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire peut être noté* $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, FFP, FPF, PFF, FFF\}$. *Par exemple, l'élément* PFP *correspond au résultat "obtenir pile au premier et troisième lancer et face au second lancer". L'ensemble* Ω *étant de cardinal fini, on lui associe naturellement la tribu* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. *Enfin, la pièce étant équilibrée, chaque résultat a la même probabilité d'occurence donc on prend pour* $\mathbb{P}$ *la probabilité uniforme donnée pour tout* $\omega \in \Omega$ *par* $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/8$.

2) Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\})$ la fonction définie pour tout $\omega \in \Omega$ (c'est-à-dire pour tout résultat de 3 lancers de la pièce) par $X(\omega) = 1$ si le nombre de "pile" est supérieur au nombre de "face" (et $X(\omega) = 0$ sinon).

   a) La fonction X est-elle une variable aléatoire ? Justifier votre réponse.
   <u>*Correction*</u> – *C'est forcément une variable aléatoire puisque la tribu de départ est la tribu de l'ensemble des parties de* Ω.

   b) Donner la loi de probabilité de X.
   <u>*Correction*</u> – *On note* $\mathbb{P}_X$ *la loi de* X. *Il suffit de donner les valeurs* $\mathbb{P}_X(\{0\})$ *et* $\mathbb{P}_X(\{1\})$. *On a*

   $$\mathbb{P}_X(\{0\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{0\})) = \mathbb{P}(\{FFP, FPF, PFF, FFF\}) = 4/8 = 1/2.$$

   Evidemment, $\mathbb{P}_X(\{1\}) = 1/2$ *pour avoir* $\mathbb{P}_X(\{0\}) + \mathbb{P}_X(\{1\}) = 1$.

3) Reprendre les questions 1) et 2) en supposant que la pièce a une probabilité de 1/3 de tomber du côté "pile".
<u>*Correction*</u> – *On reprend le même ensemble* Ω *muni de la même tribu* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. *La mesure de probabilité est par contre différente. On a*

$$\mathbb{P}(\{PPP\}) = 1/3 \times 1/3 \times 1/3 = 1/27,$$

$$\mathbb{P}(\{PPF\}) = \mathbb{P}(\{PFP\}) = \mathbb{P}(\{FPP\}) = 2/3 \times 1/3 \times 1/3 = 2/27,$$
$$\mathbb{P}(\{FFP\}) = \mathbb{P}(\{FPF\}) = \mathbb{P}(\{PFF\}) = 1/3 \times 2/3 \times 2/3 = 4/27,$$

et enfin, $\mathbb{P}(\{FFF\}) = 2/3 \times 2/3 \times 2/3 = 8/27$. *La loi de* X *est alors donnée par*

$$\mathbb{P}_X(\{0\}) = \mathbb{P}(\{FFP, FPF, PFF, FFF\}) = 3 \times 4/27 + 8/27 = 20/27,$$

et donc $\mathbb{P}_X(\{1\}) = 7/27$.

Exercice 4 – On dispose d'un sac contenant 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire une boule du sac au hasard.

1) Modéliser cette expérience aléatoire par un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
   Correction – L'ensemble des résultats possibles est l'ensemble $\omega = \{V, R\}$ où l'élément R correspond au résultat "obtenir une boule rouge" et V, "obtenir une boule verte". L'ensemble Ω étant de cardinal fini, on lui associe naturellement la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Enfin, pour définir la mesure de probabilité, il suffit de donner les valeurs des probabilités des singletons. On a $\mathbb{P}(\{V\}) = 3/8$ et $\mathbb{P}(\{R\}) = 5/8$

2) On introduit la fonction X définie pour tout résultat de l'expérience aléatoire par $X(\omega) = 1$ si le résultat ω est une boule verte et $X(\omega) = 2$ sinon. On munit l'ensemble d'arrivée de la plus grande tribu possible.

   a) La fonction X est-elle une variable aléatoire ? Justifier votre réponse.
      Correction – C'est forcément une variable aléatoire puisque la tribu de départ est la tribu de l'ensemble des parties de Ω.

   b) Ecrire X sous la forme d'une fonction étagée positive.
      Correction – On a

$$X = 1 \times \mathbb{I}_{\{V\}} + 2 \times \mathbb{I}_{\{R\}}$$

      C'est donc bien une fonction étagée positive de la forme

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i},$$

      avec $k = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $A_1 = \{V\}$ et $A_2 = \{R\}$. Evidemment A_1 et A_2 sont des événements qui forment une partition de Ω.

   c) Calculer l'intégrale

$$\int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

      Correction – En utilisant la définition de l'intégrale d'une fonction étagée positive,

$$\int_{\Omega} X d\mathbb{P} = 1 \times \mathbb{P}(\{V\}) + 2 \times \mathbb{P}(\{R\}) = 3/8 + 10/8 = 13/8.$$

      Ceci n'est rien d'autre que l'espérance de X.