Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2022 - 2023

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Questions de cours –

1) Soient $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$ deux espaces mesurables et soit $f : E_1 \to E_2$ une fonction. Quelle propriété doit vérifier cette fonction pour être une fonction mesurable ?

2) Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Donner la définition de la loi de la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$.

3) Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$. Donner la définition de la tribu $\sigma(\mathcal{C})$, la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

4) Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Donner la définition d'une fonction étagée positive $g : (E, \mathcal{E}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et donner l'expression de l'intégrale de Lebesgue $\int_E g d\mu$.

Exercice 1 – Donner l'ensemble des éléments des tribus de parties de $\mathbb{N}$ suivantes : $\sigma(\{\{0\}\})$; $\sigma(\{\{0\}, \{1\}\})$ et $\sigma(\{\{0, 1\}\})$.

Exercice 2 – Soient E_1 et E_2 deux ensembles quelconques et $f : E_1 \mapsto E_2$ une application. Montrer que si E_1 est muni d'une tribu $\mathcal{E}_1$ quelconque et E_2 de la tribu triviale $\{\emptyset, E_2\}$ alors l'application f est mesurable.

Exercice 3 – Soit $f : [0, 1[\mapsto [0, 1]$ l'application définie pour tout $x \in [0, 1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} i \mathbb{I}_{\{x \in [(i-1)/4, i/4[\}}$$

On munit l'ensemble d'arrivée $[0, 1]$ de la tribu $\mathcal{E}_2$ engendrée par $\{\{i/4\},\ i = 1, \dots, 4\}$. Quelle est l'ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}([0, 1[)$ pour lequel $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite tribu de parties de $[0, 1[$ rendant f mesurable ?

Exercice 4 – On dispose de deux sacs S_1 et S_2 contenant respectivement 3 boules rouges, 1 boule verte et 4 boules rouges, deux boules vertes. On pourra considérer que les boules sont numérotées. On s'intéresse au jeu de hasard suivant : un joueur lance une pièce équilibrée. Si elle tombe sur pile (resp. face) il tire une boule dans le sac S_1 (resp. S_2). Le joueur gagne s'il tire une boule verte.

1) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de décrire cette expérience.

2) Ecrire l'évènement "le joueur gagne" et calculer sa probabilité.

Exercice 5 – Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction $X_k : ([0,1[, \mathcal{B}([0,1[)) \mapsto (E, \mathcal{P}(E))$ définit pour tout $\omega \in [0,1[$ par

$$X_k(\omega) := \frac{1}{2^{2k}} \sum_{i=1}^{2^k} i^2 \mathbb{I}_{[(i-1)/2^k, i/2^k[}(\omega),$$

où E est l'ensemble des valeurs prises par X_k.

1) Décrire l'ensemble E.

2) Montrer que X_k est une fonction mesurable.

3) On munit l'ensemble $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[))$ de la mesure de Lebesgue λ. Après avoir rappelé la définition de la mesure λ, calculer l'intégrale de Lebesgue

$$I_k := \int_{[0,1]} X_k d\lambda.$$

(*Rappel :* $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.)

4) Quelle est la limite de I_k lorsque l'on fait tendre k vers l'infini ?

Exercice 6 – On considère un jeu de 9 cartes composé de 3 cartes noires numérotées de 1 à 3, 3 cartes rouges numérotées de 1 à 3 et 3 cartes blanches numérotées de 1 à 3. On tire simultanément 3 cartes de ce jeu. L'ensemble des résultats possibles est noté Ω. Un exemple d'élément de Ω est $(N1, R2, N3)$ correspondant au tirage des cartes noires numérotées 1 et 3 et de la carte rouge numéro 2.

1) Quel est le cardinal de Ω ?

On munit Ω de sa plus grande tribu $\mathcal{F}$ et de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

2) Calculer la probabilité d'obtenir 3 cartes rouges. Celle d'obtenir 2 cartes rouges et une carte blanche.

On introduit la fonction $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\{0,1,2,3\}, \mathcal{P}(\{0,1,2,3\}))$. Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est le nombre de cartes rouges tirées.

3) La fonction X est-elle une variable aléatoire ? (justifier votre réponse).

4) Donner la loi de X.

5) (Question bonus) Calculer l'espérance de X.