Contrôle continu #1 de Probabilités

Correction

Exercice 1 – On a

$$\sigma(\{\{0\}\}) = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{0\}, \mathbb{N} \setminus \{0\}\},$$

$$\sigma(\{\{0\}, \{1\}\}) = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{0\}, \{1\}, \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathbb{N} \setminus \{1\}, \{0,1\}, \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\},$$

$$\sigma(\{\{0,1\}\}) = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{0,1\}, \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\},$$

Exercice 2 – Comme $f^{-1}(E_2) = E_1 \in \mathcal{E}_1$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{E}_1$, il est clair que f est mesurable.

Exercice 3 – Comme $f^{-1}(\{i/4\}) = [(i-1)/4, i/4[$, la plus petite tribu rendant f mesurable est la tribu $\sigma(\{[(i-1)/4, i/4[,\ i = 1, \ldots, 4\})$.

Exercice 4 – Pour le sac S_1, on note les trois boules rouges $R_1^{(1)}$, $R_2^{(1)}$, $R_3^{(1)}$ et la boule verte $V^{(1)}$. Pour le sac S_2, on note les quatre boules rouges $R_1^{(2)}$, $R_2^{(2)}$, $R_3^{(2)}$, $R_4^{(2)}$ et les deux boules vertes $V_1^{(2)}$, $V_2^{(2)}$.

1) On peut écrire Ω sous la forme d'un espace produit $\Omega_1 \times \Omega_2$ avec $\Omega_1 = \{P, F\}$ représentant les résultats possibles du lancer de la pièce et $\Omega_2 = \{R_1^{(1)}, R_2^{(1)}, R_3^{(1)}, V^{(1)}, R_1^{(2)}, R_2^{(2)}, R_3^{(2)}, R_4^{(2)}, V_1^{(2)}, V_2^{(2)}\}$ donnant les résultats possibles du tirage dans l'un des deux sacs. La tribu produit $\mathcal{F}$ est évidemment $\mathcal{P}(\Omega_1) \otimes \mathcal{P}(\Omega_2)$. On peut également travailler avec l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$ avec $\Omega = \{(P, R_1^{(1)}), (F, R_1^{(2)}), \ldots\}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Le cardinal de Ω est ici de 10. Enfin, concernant la mesure de probabilité $\mathbb{P}$, on prend

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\} \times \{\omega_2\}) = 1/2 \times 1/4 = 1/8,$$

si $\omega_1 = P$ et $\omega_2 \in \{R_1^{(1)}, R_2^{(1)}, R_3^{(1)}, V^{(1)}\}$, et

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\} \times \{\omega_2\}) = 1/2 \times 1/6 = 1/12,$$

si $\omega_1 = F$ et $\omega_2 \in \{R_1^{(2)}, R_2^{(2)}, R_3^{(2)}, R_4^{(2)}, V_1^{(2)}, V_2^{(2)}\}$.

2) L'événement "le joueur gagne" et $\Omega_1 \times \{V^{(1)}, V_1^{(2)}, V_2^{(2)}\}$. Sa probabilité est donnée par :

$$\mathbb{P}(\{(P, V^{(1)})\}) + \mathbb{P}(\{(F, V_1^{(2)})\}) + \mathbb{P}(\{(F, V_2^{(2)})\}) = 1/8 + 1/6 = 7/24 \approx 0.292$$

Exercice 5 –

1) La fonction $X_k(\cdot)$ prend ses valeurs dans l'ensemble
$$E = \left\{ \frac{i^2}{2^{2k}},\ i = 1, \dots, 2^k \right\}.$$

2) La fonction $X_k(\cdot)$ est une fonction étagée positive car pour tout $i = 1, \dots, 2^k$,
$$\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right[\in \mathcal{B}([0,1[).$$
Donc $X_k(\cdot)$ est une fonction mesurable.

3) La mesure de Lebesgue λ sur $\mathcal{B}([0,1[)$ est définie par ses valeurs sur les intervalles $]a,b[$ avec $0 \leq a \leq b < 1$. On a $\lambda(]a,b[) = b - a$. Comme $X_k(\cdot)$ est une fonction étagée positive, on a :
$$I_k = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{i=1}^{2^k} \frac{i^2}{2^k} = \frac{1}{2^{3k}} \sum_{i=1}^{2^k} i^2 = \frac{2^k(2^k+1)(2^{k+1}+1)}{6 \times 2^{3k}}$$

4) En prenant la limite lorsque $k \to \infty$, on a :
$$I_k \sim \frac{2^{3k+1}}{6 \times 2^{3k}} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 6 –

1) Le cardinal de Ω est
$$\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 84$$

2) La probabilité d'obtenir 3 cartes rouges est de $1/84$. Celle d'obtenir 2 cartes rouges et une carte blanche est de $(3 \times 3)/84 = 9/84$.

3) Oui X est une variable aléatoire car la tribu de l'espace de départ est la plus grande tribu possible. Donc nécessairement, tous les antécédents seront dans $\mathcal{F}$.

4) Il suffit de donner les quatre valeurs $\mathbb{P}_X(\{0\}) = \mathbb{P}(X = 0) = 20/84 = 5/21$, $\mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}(X = 1) = 45/84$, $\mathbb{P}_X(\{2\}) = \mathbb{P}(X = 2) = 18/84 = 9/42 = 3/14$ et $\mathbb{P}_X(\{3\}) = \mathbb{P}(X = 3) = 1/84$. On vérifie bien que la somme vaut 1.

5) On a
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{3} i\mathbb{P}_X(\{i\}) = \mathbb{P}_X(\{1\}) + 2\mathbb{P}_X(\{2\}) + 3\mathbb{P}_X(\{3\}) = 1.$$