Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2023 - 2024

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Questions de cours –

1) Soit E un ensemble quelconque et $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ un ensemble de parties de E. Donner les propriétés que doit vérifier l'ensemble $\mathcal{E}$ pour être une tribu de parties de E.

2) Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables et $f : (E, \mathcal{E}) \mapsto (F, \mathcal{F})$ une application. Compléter la définition suivante : *l'application f est mesurable si ….*

Exercice 1 – Soit l'ensemble $E = \{2^i;\ i \in \mathbb{N}\}$. Pour tout couple $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq j \leq k \leq +\infty$, on note $A_j^k := \{2^i;\ j \leq i \leq k\} \subset E$.

1) Quel est, en fonction de j et k, le cardinal de l'ensemble A_j^k ? Quel est l'unique élément de A_2^2 ?

2) Donner les éléments des tribus de parties de E suivantes :

$$\sigma\left(\{A_0^0\}\right),\ \sigma\left(\{A_0^0, A_1^1\}\right) \text{ et } \sigma\left(\{A_0^0 \cup A_1^1\}\right).$$

3) Soit la fonction $\mu : \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ définie pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ par

$$\mu(A) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid 2^k \in A\}.$$

avec la convention $\max \emptyset = 0$. Justifier le fait que μ n'est pas une mesure sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{P}(E))$.

Exercice 2 – Soient E_1 et E_2 deux ensembles quelconques et $f : E_1 \mapsto E_2$ une application. Soit $A \subset E_2$. Si on munit l'ensemble E_2 de la tribu $\mathcal{E}_2 = \{\emptyset, E_2, A, E_2 \setminus A\}$, donner la plus petite tribu de parties de E_1 rendant f mesurable.

Exercice 3 – On lance simultanément et de manière indépendante trois jetons de couleurs différentes. Chaque jeton présente une face avec le chiffre 0 et une face avec le chiffre 1.

1) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ permettant de décrire cette expérience.

2) Ecrire l'événement "on obtient trois fois le chiffre 1" et calculer sa probabilité.

On introduit la fonction $X : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{P}(E))$ qui donne la somme des trois chiffres obtenus.

3) Donner l'ensemble E des valeurs prises par X.

4) Quelle est la plus petite tribu $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ rendant la fonction X mesurable. Donner un sous-ensemble de Ω qui n'appartient pas à $\mathcal{G}$.

5) Après avoir montré que X^2 s'écrit sous la forme d'une fonction étagée positive, calculer la valeur de l'intégrale de Lebesgue

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_\Omega X^2 d\mathbb{P}.$$

Exercice 4 – Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On s'intéresse à l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce équilibrée n fois et cela de manière indépendante.

1) Modéliser cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$. Vous donnerez entre autre le cardinal de Ω_n en fonction de n. (Aide : si $n = 3$, un élément de Ω_3 sera par exemple (F, F, P) correspondant au résultat "obtenir Face aux deux premiers lancers et Pile au dernier").

On introduit la fonction $X_n : \Omega_n \to (E_n, \mathcal{P}(E_n))$ qui a tout élément ω de Ω_n associe le nombre de "Pile" obtenu.

2) Si on munit Ω_n de la tribu $\mathcal{P}(\Omega_n)$, expliquer pourquoi X_n est une variable aléatoire.

3) Quel est l'ensemble E_n des valeurs prises par X_n ?

On note $\mathcal{G}_n$ la plus petite tribu de parties de Ω_n rendant X_n mesurable.

4) Donner les éléments de l'ensemble $\mathcal{C}_3 \subset \mathcal{P}(\Omega_3)$ tel que $\mathcal{G}_3 = \sigma(\mathcal{C}_3)$.

5) Le singleton $\{(P, P, P)\}$ appartient-il à $\mathcal{G}_3$? Même question avec le singleton $\{(F, P, F)\}$. Vous justifierez vos réponses.

On introduit à présent la fonction $Y_n : \Omega_n \to (F_n, \mathcal{P}(F_n))$ qui a tout élément ω de Ω_n associe le nombre de lancers nécessaires pour obtenir "Pile". Si à l'issue des n lancers, aucun "pile" n'a été obtenu, Y_n prend la valeur $+\infty$.

6) Quel est l'ensemble F_n des valeurs prises par Y_n ?

7) Si on munit Ω_n de la tribu $\mathcal{G}_n$, la fonction Y_n est-elle une variable aléatoire ? Justifier votre réponse.

On note $\mathcal{H}_n$ la plus petite tribu de parties de Ω_n rendant Y_n mesurable.

8) Donner les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_3 \subset \mathcal{P}(\Omega_3)$ tel que $\mathcal{H}_3 = \sigma(\mathcal{D}_3)$.

9) Donner la loi de Y_3.