Contrôle continu #1 de “ Probabilités 3 ”

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2023 - 2024

Correction

Exercice 1 – Soit l'ensemble $E = \{2^i;\ i \in \mathbb{N}\}$. Pour tout couple $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq j \leq k \leq +\infty$, on note $A_j^k := \{2^i;\ j \leq i \leq k\} \subset E$.

1) Quel est, en fonction de j et k, le cardinal de l'ensemble A_j^k ? Quel est l'unique élément de A_2^2 ?
Le cardinal de $A_{j,k}$ est de $k-j+1$. On a $A_2^2 = \{4\}$.

2) Donner les éléments des tribus de parties de E suivantes :

$$\sigma\left(\{A_0^0\}\right),\ \sigma\left(\{A_0^0, A_1^1\}\right) \text{ et } \sigma\left(\{A_0^0 \cup A_1^1\}\right).$$

On a $\sigma\left(\{A_0^0\}\right) = \{\emptyset, E, \{1\}, E \setminus \{1\}\}$,

$$\sigma\left(\{A_0^0, A_1^1\}\right) = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2\}, E \setminus \{1\}, E \setminus \{2\}, \{1,2\}, E \setminus \{1,2\}\},$$

et $\sigma\left(\{A_0^0 \cup A_1^1\}\right) = \{\emptyset, E, \{1,2\}, E \setminus \{1,2\}\}$.

3) Soit la fonction $\mu : \mathcal{P}(E) \to [0,\infty]$ définie pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ par

$$\mu(A) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid 2^k \in A\}.$$

avec la convention $\max \emptyset = 0$. Justifier le fait que μ n'est pas une mesure sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{P}(E))$.
On a par exemple $\mu(A_1^1) = 1$, $\mu(A_2^2) = 2$ et $\mu(A_1^1 \cup A_2^2) = 2 \neq \mu(A_1^1) + \mu(A_2^2)$ alors que A_1^1 et A_2^2 sont bien disjoints.

Exercice 2 – Soient E_1 et E_2 deux ensembles quelconques et $f : E_1 \mapsto E_2$ une application. Soit $A \subset E_2$. Si on munit l'ensemble E_2 de la tribu $\mathcal{E}_2 = \{\emptyset, E_2, A, E_2 \setminus A\}$, donner la plus petite tribu de parties de E_1 rendant f mesurable.
Pour que f soit mesurable, il faut que toutes les pré-images des éléments de $\mathcal{E}_2$ appartiennent à la tribu de l'ensemble de départ. On remarque que $\mathcal{E}_2 = \sigma(\{A\})$. Ainsi il suffit que $f^{-1}(A)$ appartiennent à la tribu de départ. Ainsi la plus petite tribu rendant f mesurable est $\sigma(\{f^{-1}(A)\})$.

Exercice 3 – On lance simultanément et de manière indépendante trois jetons de couleurs différentes. Chaque jeton présente une face avec le chiffre 0 et une face avec le chiffre 1.

1) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ permettant de décrire cette expérience.
   On peut prendre $\Omega = \{(0,0,0),(0,0,1),\cdots\}$. L'élément $(0,0,1)$ par exemple correspond au résultat *Le jeton de couleur C_1 présente la face 0, le jeton de couleur C_2 la face 0 et le jeton de couleur C_3 la face 1. Le cardinal de Ω est donc de $2^3 = 8$. On munit Ω de la plus grande tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et on utilise la probabilité uniforme.*

2) Ecrire l'événement "on obtient trois fois le chiffre 1" et calculer sa probabilité.
   Cet événement est l'ensemble $\{(1,1,1)\}$ et sa probabilité est de $1/8$.

On introduit la fonction $X : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{P}(E))$ qui donne la somme des trois chiffres obtenus.

3) Donner l'ensemble E des valeurs prises par X.
   $E = \{0,1,2,3\}$.

4) Quelle est la plus petite tribu $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ rendant la fonction X mesurable. Donner un sous-ensemble de Ω qui n'appartient pas à $\mathcal{G}$.
   Pour que X soit mesurable (c'est-à-dire pour qu'elle soit une variable aléatoire, il suffit que les ensembles $X^{-1}(\{0\})$, $X^{-1}(\{1\})$, $X^{-1}(\{2\})$ et $X^{-1}(\{3\})$ appartiennent à $\mathcal{G}$. Ainsi,

$$\mathcal{G} = \sigma(\{X^{-1}(\{0\}), X^{-1}(\{1\}), X^{-1}(\{2\}), X^{-1}(\{3\})\}),$$

   avec $X^{-1}(\{0\}) = \{(0,0,0)\}$, $X^{-1}(\{1\}) = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $X^{-1}(\{2\}) = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ et $X^{-1}(\{3\}) = \{(1,1,1)\}$. Il est facile de voir que par exemple l'ensemble $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ n'appartient pas à $\mathcal{G}$.

5) Après avoir montré que X^2 s'écrit sous la forme d'une fonction étagée positive, calculer la valeur de l'intégrale de Lebesgue

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_\Omega X^2 d\mathbb{P}.$$

   On a

$$X^2 = \sum_{i=0}^{4} i^2 \mathbb{I}_{X^{-1}(\{i\})}$$

   Ainsi,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_\Omega X^2 d\mathbb{P} = \sum_{i=0}^{4} i^2 \mathbb{P}(X^{-1}(\{i\})) = 0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8} = \frac{7}{4}.$$

Exercice 4 – Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On s'intéresse à l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce équilibrée n fois et cela de manière indépendante.

1) Modéliser cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$. Vous donnerez entre autre le cardinal de Ω_n en fonction de n. (Aide : si $n = 3$, un élément de Ω_3 sera par exemple (F, F, P) correspondant au résultat "obtenir Face aux deux premiers lancers et Pile au dernier").
On a donc $\Omega_n = \{(F, F, \cdots), (F, P, P, \cdots), \cdots\}$ qui est l'ensemble des n-uplets que l'on peut former avec Pile et Face. Il y a donc 2^n éléments dans Ω_n. Pour $\mathcal{F}_n$ on prend la plus grande tribu $\mathcal{P}(\Omega_n)$ et pour $\mathbb{P}_n$ la probabilité uniforme discrète.

On introduit la fonction $X_n : \Omega_n \to (E_n, \mathcal{P}(E_n))$ qui a tout élément ω de Ω_n associe le nombre de "Pile" obtenu.

2) Si on munit Ω_n de la tribu $\mathcal{P}(\Omega_n)$, expliquer pourquoi X_n est une variable aléatoire.
Si l'ensemble de départ est la plus grande tribu, toutes les fonctions sont mesurables.

3) Quel est l'ensemble E_n des valeurs prises par X_n ?
L'ensemble E_n est $\{0, 1, \cdots, n\}$.

On note $\mathcal{G}_n$ la plus petite tribu de parties de Ω_n rendant X_n mesurable.

4) Donner les éléments de l'ensemble $\mathcal{C}_3 \subset \mathcal{P}(\Omega_3)$ tel que $\mathcal{G}_3 = \sigma(\mathcal{C}_3)$.
Pour que X_3 soit mesurable, il suffit que la tribu de départ contienne les ensembles $X^{-1}(\{0\})$, $X^{-1}(\{1\})$, $X^{-1}(\{2\})$ et $X^{-1}(\{3\})$. Noter que l'on peut en fait se passer d'un des ensembles (on le retrouvera lorsque l'on complètera pour faire une tribu). On a donc

$$\mathcal{C}_3 = \Big\{ \{(P, P, P)\}, \{(P, F, F), (F, P, F), (F, F, P)\}, \\ \{(P, P, F), (P, F, P), (F, P, P)\}, \{(F, F, F)\} \Big\}.$$

5) Le singleton $\{(P, P, P)\}$ appartient-il à $\mathcal{G}_3$? Même question avec le singleton $\{(F, P, F)\}$. Vous justifierez vos réponses.
Oui le singleton $\{(P, P, P)\}$ appartient à $\mathcal{G}_3$. C'est l'ensemble $X^{-1}(\{3\})$. Il n'est par contre pas possible de trouver le singleton $\{(F, P, F)\}$ par le jeu des unions et des complémentaires à partir des quatre ensembles $X^{-1}(\{0\})$, $X^{-1}(\{1\})$, $X^{-1}(\{2\})$ et $X^{-1}(\{3\})$. Ainsi, $\{(F, P, F)\}$ n'est pas un élément de $\mathcal{G}_3$.

On introduit à présent la fonction $Y_n : \Omega_n \to (F_n, \mathcal{P}(F_n))$ qui a tout élément ω de Ω_n associe le nombre de lancers nécessaires pour obtenir "Pile". Si à l'issue des n lancers, aucun "pile" n'a été obtenu, Y_n prend la valeur $+\infty$.

6) Quel est l'ensemble F_n des valeurs prises par Y_n ?
On a $F_n = \{1, \cdots, n, +\infty\}$.

7) Si on munit Ω_n de la tribu $\mathcal{G}_n$, la fonction Y_n est-elle une variable aléatoire ? Justifier votre réponse.
La fonction Y_n n'est pas mesurable dans ce cas car par exemple si $n = 3$, l'ensemble $Y_3^{-1}(\{1\}) = \{(P, P, P), (P, P, F), (P, F, P), (P, F, F)\}$ n'est pas un élément de $\mathcal{G}_3$.

On note $\mathcal{H}_n$ la plus petite tribu de parties de Ω_n rendant Y_n mesurable.

8) Donner les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_3 \subset \mathcal{P}(\Omega_3)$ tel que $\mathcal{H}_3 = \sigma(\mathcal{D}_3)$.
Par un raisonnement identique à celui fait pour la question 4), on a

$$\mathcal{D}_3 = \Big\{\{(P, P, P), (P, P, F), (P, F, P), (P, F, F)\}, \{(F, P, P), (F, P, F)\}, \{(F, F, P)\}, \{(F, F, F)\}\Big\}.$$

9) Donner la loi de Y_3.
Il est à présent facile de voir que $\mathbb{P}(Y_3 = 1) = 4/8 = 1/2$, $\mathbb{P}(Y_3 = 2) = 2/8 = 1/4$, $\mathbb{P}(Y_3 = 3) = 1/8$ et $\mathbb{P}(Y_3 = +\infty) = 1/8$.