

Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie
Année 2024 - 2025

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Questions de cours – Soit la fonction $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ où (Ω, \mathcal{F}) est un espace probabilisable et (E, \mathcal{E}) un espace mesurable.

- 1) Quelles sont les propriétés qui doivent être satisfaites par $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ pour être une tribu de parties de E ?
- 2) Que doit vérifier la fonction X pour être une variable aléatoire ?

Exercice 1 – Soit $\Omega = \{“a”, “b”, \dots, “z”\}$ l’ensemble des 26 lettres de l’alphabet et $V = \{“a”, “e”, “i”, “o”, “u”, “y”\}$ l’ensemble des 6 voyelles.

- 1) Quelle est la tribu de parties de Ω définie par $\mathcal{F}_1 := \sigma(\mathcal{C}_1)$ où \mathcal{C}_1 est l’ensemble des singletons de Ω ?
- 2) Donner les éléments de la tribu de parties de Ω définie par $\mathcal{F}_2 := \sigma(\mathcal{C}_2)$ où $\mathcal{C}_2 = \{V\}$.

On introduit la fonction $\mathbb{I}_V : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ qui à tout élément de E associe la valeur 1 si c’est une voyelle et 0 sinon.

- 3) Quelle est la plus petite tribu que l’on doit mettre sur l’ensemble de départ pour que \mathbb{I}_V soit mesurable ?

On munit l’ensemble de départ Ω de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ contenant tous les sous-ensembles de Ω .

- 4) Montrer que la fonction \mathbb{P} définie pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ par $\mathbb{P}(A) = \text{card}(A)/26$ est une mesure de probabilité.
- 5) La fonction $\mathbb{I}_V : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}) \rightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$ est-elle une variable aléatoire ? Si oui, calculer son espérance.
- 6) La fonction $\tilde{\mathbb{P}}$ définie pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ par $\tilde{\mathbb{P}}(A) = [\text{card}(A)]^2/676$ est-elle une mesure de probabilité ?

Exercice 2 – On considère l’expérience consistant à lancer simultanément un dé et une pièce. On supposera que le dé et la pièce sont équilibrés.

- 1) Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ modélisant cette expérience.

On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ qui à tout $\omega \in \Omega$ associe la valeur du dé multipliée par 1 si la pièce tombe du côté pile et par 0 sinon.

- 2) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X ?
- 3) Quelle est la loi de X ?
- 4) Montrer que X est une fonction étagée positive.
- 5) Calculer l'espérance de X .

Exercice 3 – Dans cet exercice, on se place sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On rappelle que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, les limites supérieures et inférieures de cette suite sont

$$\overline{\lim} A_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \quad \text{et} \quad \underline{\lim} A_n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

- 1) Montrer que $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ sont des éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- 2) Calculer la limite supérieure et la limite inférieure de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $A_n := [-1, 1 + 1/\cos(n\pi)]$.

Exercice 4 – On considère les fonctions f et g définies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

- 1) La fonction f est-elle mesurable ? (justifier correctement votre réponse).
- 2) La fonction f est-elle intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue ? Si oui, calculer la valeur de l'intégrale.
- 3) Reprendre les questions 1) et 2) pour la fonction g .

Exercice 5 – On considère la fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < 0, \\ 2 - x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Donner les pré-images par la fonction f des ensembles suivants : $] - \infty, 1/2]$, $] - \infty, 2[$, $] - \infty, 2]$ et $[1/2, 3/2]$.