

## Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie  
Année 2024 - 2025

*Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits*

---

**Questions de cours** – Soit la fonction  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$  où  $(\Omega, \mathcal{F})$  est un espace probabilisable et  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable.

- 1) Quelles sont les propriétés qui doivent être satisfaites par  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$  pour être une tribu de parties de  $E$  ?

Il faut que

- i)  $\emptyset \in \mathcal{E}$ ;
- ii) si  $A \in \mathcal{E}$  alors  $A^C = E \setminus A \in \mathcal{E}$ ,
- iii) si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{E}$  alors l'union des ces éléments est aussi un élément de  $\mathcal{E}$ .

- 2) Que doit vérifier la fonction  $X$  pour être une variable aléatoire ?

Il faut que  $X$  soit mesurable i.e., pour tout  $A \in \mathcal{E}$ , il faut que  $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ .

**Exercice 1** – Soit  $\Omega = \{“a”, “b”, \dots, “z”\}$  l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet et  $V = \{“a”, “e”, “i”, “o”, “u”, “y”\}$  l'ensemble des 6 voyelles.

- 1) Quelle est la tribu de parties de  $\Omega$  définie par  $\mathcal{F}_1 := \sigma(\mathcal{C}_1)$  où  $\mathcal{C}_1$  est l'ensemble des singletons de  $\Omega$  ?

On a  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$  qui est la tribu contenant tous les sous ensembles de  $\Omega$ .

- 2) Donner les éléments de la tribu de parties de  $\Omega$  définie par  $\mathcal{F}_2 := \sigma(\mathcal{C}_2)$  où  $\mathcal{C}_2 = \{V\}$ .

On a  $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, V, \Omega \setminus V\}$ .

On introduit la fonction  $\mathbb{I}_V : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  qui a tout élément de  $E$  associe la valeur 1 si c'est une voyelle et 0 sinon.

- 3) Quelle est la plus petite tribu que l'on doit mettre sur l'ensemble de départ pour que  $\mathbb{I}_V$  soit mesurable ?

Il faut mettre la tribu  $\mathcal{F}_2$  puisque pour que  $\mathbb{I}_V$  soit mesurable, il suffit que  $\mathcal{F}_2$  contienne  $V$ .

On munit l'ensemble de départ  $\Omega$  de la tribu  $\mathcal{P}(\Omega)$  contenant tous les sous-ensembles de  $\Omega$ .

- 4) Montrer que la fonction  $\mathbb{P}$  définie pour tout  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  par  $\mathbb{P}(A) = \text{card}(A)/26$  est une mesure de probabilité.

Il faut d'abord vérifier que  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  ce qui est évident car  $\text{card}(\emptyset) = 0$ . Il faut ensuite vérifier la propriété de  $\sigma$ -additivité. Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments disjoints de  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Les ensembles étant disjoints, on a

$$\text{card} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{card}(A_n).$$

On en déduit facilement la propriété de  $\sigma$ -additivité. Il faut enfin vérifier que  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  ce qui est évident puisque  $\text{card}(\Omega) = 26$ .

- 5) La fonction  $\mathbb{I}_V : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}) \rightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$  est-elle une variable aléatoire ? Si oui, calculer son espérance.

La fonction  $\mathbb{I}_V$  est une variable aléatoire (c'est-à-dire une fonction mesurable) car  $V \in \mathcal{P}(\Omega)$ . On aurait pu également dire que toute application dont l'ensemble de départ est muni de la plus grande tribu est nécessairement mesurable. Son espérance est

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_V) = \mathbb{P}(V) = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}.$$

- 6) La fonction  $\tilde{\mathbb{P}}$  définie pour tout  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  par  $\tilde{\mathbb{P}}(A) = [\text{card}(A)]^2/676$  est-elle une mesure de probabilité ?

Ce n'est pas une mesure de probabilité car si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments disjoints de  $\mathcal{P}(\Omega)$ ,

$$\left[ \text{card} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right]^2 \neq \sum_{n \in \mathbb{N}} [\text{card}(A_n)]^2.$$

Ainsi,  $\tilde{\mathbb{P}}$  ne vérifie pas la propriété de  $\sigma$ -additivité. Ce n'est donc pas une mesure.

**Exercice 2** – On considère l'expérience consistant à lancer simultanément un dé et une pièce. On supposera que le dé et la pièce sont équilibrés.

- 1) Donner un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  modélisant cette expérience. On a  $\Omega = \{(1, P), (2, P), \dots, (6, P), (1, F), \dots, (6, F)\}$  où par exemple  $(3, F)$  signifie que le résultat de l'expérience est que le dé tombe sur la face 3 et la pièce sur "face". On a  $\text{card}(\Omega) = 12$  et  $\mathbb{P}$  est la probabilité uniforme (i.e.,  $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/12$  pour tout  $\omega \in \Omega$ ).

On introduit la variable aléatoire  $X : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$  qui à tout  $\omega \in \Omega$  associe la valeur du dé multipliée par 1 si la pièce tombe du côté pile et par 0 sinon.

2) Quel est l'ensemble  $E$  des valeurs possibles de  $X$  ?

On a  $E = \{0, 1, \dots, 6\}$ .

3) Quelle est la loi de  $X$  ?

Pour déterminer la loi de  $X$ , il suffit de donner les probabilités des singletons car  $\mathcal{P}(E)$  est la tribu engendrée par les singletons. On a  $\mathbb{P}_X(\{0\}) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/2$  qui correspond à la probabilité que la pièce tombe du côté "face". De plus, pour tout  $i \in \{1, \dots, 6\}$ ,  $\mathbb{P}_X(\{i\}) = \mathbb{P}(X = i) = 1/6 \times 1/2 = 1/12$  qui correspond à la probabilité que la pièce tombe du côté "pile" et le dé sur la face  $i$ . On vérifie bien que la somme des probabilités des singletons vaut 1.

4) Montrer que  $X$  est une fonction étagée positive.

Posons  $A_0 = \{(1, F), \dots, (6, F)\}$  et  $A_i = \{(i, P)\}$  pour  $i \in \{1, \dots, 6\}$ . Les ensembles  $A_0, \dots, A_6$  sont des éléments de  $\mathcal{P}(\Omega)$  qui forment une partition de  $\Omega$ . De plus, la fonction  $X$  prend la valeur  $i$  sur  $A_i$  autrement dit,

$$X = \sum_{i=0}^6 i \mathbb{I}_{A_i},$$

qui est bien l'expression d'une fonction étagée positive.

5) Calculer l'espérance de  $X$ .

Par définition de l'intégrale d'une fonction étagée,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \sum_{i=0}^6 i \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^6 i = \frac{6 \times 7}{2 \times 12} = \frac{7}{4}.$$

**Exercice 3** – Dans cet exercice, on se place sur l'espace mesuré  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ . On rappelle que si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , les limites supérieures et inférieures de cette suite sont

$$\overline{\lim} A_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \quad \text{et} \quad \underline{\lim} A_n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

1) Montrer que  $\overline{\lim} A_n$  et  $\underline{\lim} A_n$  sont des éléments de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Ce sont évidemment des éléments de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  comme union et intersections dénombrables d'éléments de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

2) Calculer la limite supérieure et la limite inférieure de la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $A_n := [-1, 1 + 1/\cos(n\pi)]$ .

On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{k \geq n} A_k = [-1, 2] \quad \text{et} \quad \bigcap_{k \geq n} A_k = [-1, 0].$$

Ainsi,  $\overline{\lim} A_n = [-1, 2]$  et  $\underline{\lim} A_n = [-1, 0]$ .

**Exercice 4** – On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  par

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

- 1) La fonction  $f$  est-elle mesurable ? (justifier correctement votre réponse).  
Remarquons tout d'abord que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . En effet,  $\{x\} = ]-\infty, x] \cap [x, \infty[$  qui est l'intersection de deux intervalles donc de deux éléments de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Ainsi

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

comme union dénombrable d'éléments de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . A présent pour montrer que  $f$  est mesurable, il suffit de montrer que  $f^{-1}(\{-1\})$  et  $f^{-1}(\{0\})$  sont des éléments de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  ce qui est évident car  $f^{-1}(\{-1\}) = \mathbb{Q}$  et  $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Le raisonnement est en tout point identique pour  $g$ . En conclusion,  $f$  et  $g$  sont mesurables.

- 2) La fonction  $f$  est-elle intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue ? Si oui, calculer la valeur de l'intégrale.

Il faut vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda < \infty.$$

Comme  $|f| = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}) = 0,$$

car

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \sum_{x \in \mathbb{Q}} \lambda(\{x\}) = 0.$$

Ainsi,  $f$  est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\mathbb{Q}} d\lambda = -\lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

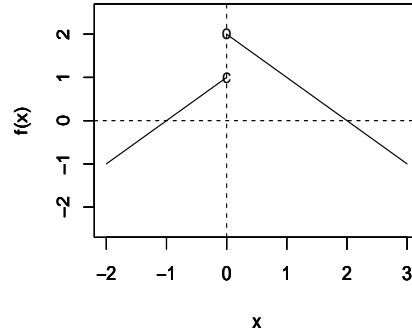
- 3) Reprendre les questions 1) et 2) pour la fonction  $g$ .

On a déjà montré que  $g$  est mesurable. Il faut ensuite remarquer que  $|g| = \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$  et donc, puisque  $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$ , la fonction  $g$  n'est pas intégrable.

**Exercice 5** – On considère la fonction  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x < 0, \\ 2-x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Donner les pré-images par la fonction  $f$  des ensembles suivants :  $] - \infty, 1/2]$ ,  
 $] - \infty, 2[$ ,  $] - \infty, 2]$  et  $[1/2, 3/2]$ .  
 On trace d'abord la fonction  $f$ .



On trouve ensuite que

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(] - \infty, 1/2]) &= ] - \infty, -1/2] \cup [3/2, \infty[, \\
 f^{-1}(] - \infty, 2[) &= \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\
 f^{-1}(] - \infty, 2]) &= \mathbb{R}, \\
 f^{-1}([1/2, 3/2]) &= [-1/2, 0[ \cup [1/2, 3/2];
 \end{aligned}$$