

Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie
Année 2025 - 2026

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Questions de cours –

- 1) Soit E un ensemble quelconque. Donner la définition d'une tribu $\mathcal{E}$ de parties de E .
- 2) Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Donner la définition d'une mesure μ définie sur $\mathcal{E}$.
- 3) Soient $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$ deux espaces mesurables et soit $f : E_1 \rightarrow E_2$ une fonction. Quelle propriété doit vérifier cette fonction pour être une fonction mesurable ?
- 4) Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ une variable aléatoire. Donner la définition de la loi de X .

Exercice 1 – Soit E un ensemble quelconque et soit $G = \{e_i; i \in \mathbb{N}\} \subset E$.

- 1) Remplacer **si possible** le point d'interrogation $\boxed{?}$ par l'un des 2 symboles suivants : $\in$ ou $\subset$

$$i) \{e_2\} \boxed{?} E; \quad ii) e_3 \boxed{?} E; \quad iii) \{e_4\} \boxed{?} \mathcal{P}(E); \quad iv) e_5 \boxed{?} \mathcal{P}(E).$$

- 2) Donner les éléments de la tribu $\mathcal{E}_1 = \sigma(\{G\})$.

On introduit le sous ensemble de G défini par $G_1 = \{e_{2i}; i \in \mathbb{N}\}$ et on pose $G_2 = G \setminus G_1$.

- 3) Donner les éléments de la tribu $\mathcal{E}_2 = \sigma(\{G, G_1\})$.

Sur l'espace mesuré $(E, \mathcal{E}_2)$, on introduit la mesure $\mu : \mathcal{E}_2 \rightarrow [0, \infty)$ pour laquelle $\mu(G_1) = 1$, $\mu(G_2) = 2$ et $\mu(E \setminus G) = 0$.

- 4) Donner les valeurs suivantes : $\mu(G)$, $\mu(E)$, $\mu(E \setminus G_2)$.

Soit $\alpha_3 > 0$. On introduit la fonction $f : (E, \mathcal{E}_2, \mu) \rightarrow ([0, \infty[, \mathcal{B}([0, \infty[))$ définie pour tout $x \in E$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in G_1, \\ 2 & \text{si } x \in G_2, \\ \alpha_3 & \text{si } x \in E \setminus G. \end{cases}$$

- 5) Quelle est la valeur de l'intégrale de Lebesgue $\int_E f d\mu$?

Exercice 2 – On dispose d'un premier sac contenant 3 boules rouges, 1 boule verte et 3 boules bleues, d'un second sac contenant 2 boules rouges et enfin d'une pièce de monnaie équilibrée. J'attire votre attention sur le fait que les boules ne sont pas numérotées.

L'expérience aléatoire consiste à lancer dans un premier temps la pièce. Si elle tombe du côté pile, on tire 2 boules dans le premier sac sinon, on tire une boule du second sac.

- 1) Modéliser cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

On introduit la fonction $X : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega)) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le nombre de boules rouges tirées.

- 2) Quel est l'ensemble E des valeurs prises par X ?
- 3) La fonction X est-elle une variable aléatoire ? (justifier votre réponse). Quelle est la plus petite tribu $\mathcal{F}$ dont on doit munir l'espace de départ pour que X soit mesurable ?

- 4) Donner l'expression de la loi $\mathbb{P}_X$ de X comme combinaison linéaire de mesures de Dirac.
- 5) Quelle est la valeur de $\mathbb{E}(X)$?

Exercice 3 – On considère la fonction $g : ([-1, 1], \mathcal{B}([0, 1])) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie pour tout $x \in [-1, 1]$ par $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

- 1) La fonction g est-elle mesurable ? Justifier votre réponse.

On introduit à présent la fonction $f : ([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1])) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \leq 1/2, \\ 4/5 & \text{si } g(x) > 1/2. \end{cases}$$

- 2) Représenter graphiquement la fonction f .
- 3) Donner les sous ensembles de $[-1, 1]$ suivants :

$$f^{-1}(]-\infty, 0.6]); f^{-1}(]-\infty, 0.25]) \text{ et } f^{-1}(]-\infty, 0.8]).$$

- 4) En utilisant le fait que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, t]; t \in \mathbb{R}\})$, montrer que f est mesurable.

On munit l'espace mesurable de départ $([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]))$ de la mesure μ définie pour tout $-1 \leq a \leq b \leq 1$ par $\mu([a, b]) = (1 + b)^2 - (1 + a)^2$.

- 5) La mesure μ est-elle bornée ? Justifier votre réponse.
- 6) Donner la valeur de l'intégrale

$$\int_{[-1, 1]} f \mathbb{I}_{]-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2[} d\mu,$$

où pour tout $A \subset [-1, 1]$, $\mathbb{I}_A$ est la fonction indicatrice sur A .