

Contrôle continu #1 de Probabilités

Correction
Année 2025 - 2026

Exercice 1 – Soit E un ensemble quelconque et soit $G = \{e_i; i \in \mathbb{N}\} \subset E$.

- 1) Remplacer **si possible** le point d'interrogation $\boxed{?}$ par l'un des 2 symboles suivants : $\in$ ou $\subset$

$$i) \{e_2\} \boxed{?} E; \quad ii) e_3 \boxed{?} E; \quad iii) \{e_4\} \boxed{?} \mathcal{P}(E); \quad iv) e_5 \boxed{?} \mathcal{P}(E).$$

i) $\subset$; ii) $\in$; iii) $\in$; iv) Ici aucun des deux symboles ne convient.

- 2) Donner les éléments de la tribu $\mathcal{E}_1 = \sigma(\{G\})$.

On a $\mathcal{E}_1 = \{E, \emptyset, G, G^C\}$.

On introduit le sous ensemble de G défini par $G_1 = \{e_{2i}; i \in \mathbb{N}\}$ et on pose $G_2 = G \setminus G_1$.

- 3) Donner les éléments de la tribu $\mathcal{E}_2 = \sigma(\{G, G_1\})$.

On a $\mathcal{E}_2 = \{E, \emptyset, G, G_1, G^C, G_1^C, G_2^C, G_2\}$.

Sur l'espace mesuré $(E, \mathcal{E}_2)$, on introduit la mesure $\mu : \mathcal{E}_2 \rightarrow [0, \infty)$ pour laquelle $\mu(G_1) = 1$, $\mu(G_2) = 2$ et $\mu(E \setminus G) = 0$.

- 4) Donner les valeurs suivantes : $\mu(G)$, $\mu(E)$, $\mu(E \setminus G_2)$.

Comme $G = G_1 \cup G_2$ avec $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, on a en utilisant la σ -additivité d'une mesure que $\mu(G) = \mu(G_1) + \mu(G_2) = 1 + 2 = 3$. De même, $\mu(E) = \mu(E \setminus G) + \mu(G) = 0 + 3 = 3$. Enfin, la mesure μ étant bornée, on a $\mu(E \setminus G_2) = \mu(E) - \mu(G_2) = 3 - 2 = 1$.

Soit $\alpha_3 > 0$. On introduit la fonction $f : (E, \mathcal{E}_2, \mu) \rightarrow ([0, \infty[, \mathcal{B}([0, \infty[))$ définie pour tout $x \in E$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in G_1, \\ 2 & \text{si } x \in G_2, \\ \alpha_3 & \text{si } x \in E \setminus G. \end{cases}$$

- 5) Quelle est la valeur de l'intégrale de Lebesgue $\int_E f d\mu$?

On remarque que f est une fonction étagée positive car elle est de la forme

$$f = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbb{I}_{A_i},$$

avec $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $A_1 = G_1$, $A_2 = G_2$ et $A_3 = E \setminus G$. Les éléments A_1 , A_2 et A_3 de $\mathcal{E}_2$ forment bien une partition de E . Ainsi,

$$\int_E f d\mu = 1 \times \mu(G_1) + 2 \times \mu(G_2) + \alpha_3 \times \mu(E \setminus G) = 1 + 4 = 5.$$

Exercice 2 – On dispose d’un premier sac contenant 3 boules rouges, 1 boule verte et 3 boules bleues, d’un second sac contenant 2 boules rouges et enfin d’une pièce de monnaie équilibrée. J’attire votre attention sur le fait que les boules ne sont pas numérotées.

L’expérience aléatoire consiste à lancer dans un premier temps la pièce. Si elle tombe du côté pile, on tire 2 boules dans le premier sac sinon, on tire une boule du second sac.

- 1) Modéliser cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
L’ensemble des réalisations possibles est

$$\Omega = \{(F, R), (P, 2R), (P, RV); (P, RB), (P, VB), (P, 2B)\},$$

où par exemple l’élément (P, RV) correspond au résultat “obtenir pile puis tirer une boule rouge et une boule verte”. La tribu est évidemment $\mathcal{P}(\Omega)$. Enfin, la mesure de probabilité est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{(F, R)\}) &= \frac{1}{2}; \quad \mathbb{P}(\{(P, 2R)\}) = \frac{1}{14}; \quad \mathbb{P}(\{(P, RV)\}) = \frac{1}{14}; \\ \mathbb{P}(\{(P, RB)\}) &= \frac{3}{14}; \quad \mathbb{P}(\{(P, VB)\}) = \frac{1}{14}; \quad \mathbb{P}(\{(P, 2B)\}) = \frac{1}{14}.\end{aligned}$$

On introduit la fonction $X : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega)) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le nombre de boules rouges tirées.

- 2) Quel est l’ensemble E des valeurs prises par X ?
On a $E = \{0, 1, 2\}$.
- 3) La fonction X est-elle une variable aléatoire ? (justifier votre réponse).
Quelle est la plus petite tribu $\mathcal{F}$ dont on doit munir l’espace de départ pour que X soit mesurable ?
La fonction X est forcément mesurable, l’ensemble de départ étant muni de la plus grande tribu. C’est donc une variable aléatoire. Pour que X soit mesurable, il suffit que la tribu de départ contienne les éléments $X^{-1}(\{0\}) = \{(P, VB), (P, 2B)\}$, $X^{-1}(\{1\}) = \{(F, R), (P, RV), (P, RB)\}$ et $X^{-1}(\{2\}) = \{(P, 2R)\}$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \sigma(\{(P, VB), (P, 2B)\}, \{(F, R), (P, RV), (P, RB)\}) \\ &= \left\{ \Omega, \emptyset, \{(P, VB), (P, 2B)\}, \{(F, R), (P, RV), (P, RB)\}, \right. \\ &\quad \{(F, R), (P, 2R), (P, RV); (P, RB)\}, \{(P, 2R), (P, VB), (P, 2B)\}, \\ &\quad \left. \{(P, VB), (P, 2B), (F, R), (P, RV), (P, RB)\}, \{(P, 2R)\} \right\}.\end{aligned}$$

- 4) Donner l'expression de la loi $\mathbb{P}_X$ de X comme combinaison linéaire de mesures de Dirac.

La variable aléatoire X étant discrète, sa loi est de la forme

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}(X = 0)\delta_0 + \mathbb{P}(X = 1)\delta_1 + \mathbb{P}(X = 2)\delta_2 = \frac{1}{7}\delta_0 + \frac{11}{14}\delta_1 + \frac{1}{14}\delta_2.$$

- 5) Quelle est la valeur de $\mathbb{E}(X)$? On a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_E x d\mathbb{P}_X(x) = 0 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{11}{14} + 2 \times \frac{1}{14} = \frac{13}{14}.$$

Exercice 3 – On considère la fonction $g : ([-1, 1], \mathcal{B}([0, 1])) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie pour tout $x \in [-1, 1]$ par $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

- 1) La fonction g est-elle mesurable ? Justifier votre réponse.

La fonction g étant continue sur $[-1, 1]$, elle est par conséquent mesurable.

On introduit à présent la fonction $f : ([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1])) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \leq 1/2, \\ 4/5 & \text{si } g(x) > 1/2. \end{cases}$$

- 2) Représenter graphiquement la fonction f .

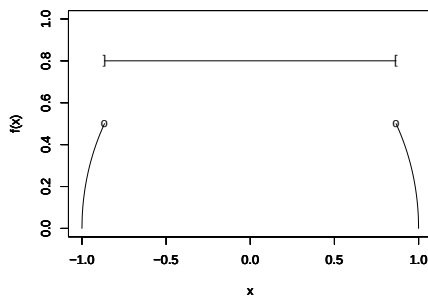


Figure 1: Représentation graphique de la fonction f .

- 3) Donner les sous ensembles de $[-1, 1]$ suivants :

$$f^{-1}(]-\infty, 0.6]); f^{-1}(]-\infty, 0.25]) \text{ et } f^{-1}(]-\infty, 0.8]).$$

On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty, 0.6]) &= \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]; \\ f^{-1}(]-\infty, 0.25]) &= \left[-1, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{15}}{4}, 1\right]; \\ \text{et } f^{-1}(]-\infty, 0.8]) &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

- 4) En utilisant le fait que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, t]; t \in \mathbb{R}\})$, montrer que f est mesurable.

Il suffit de montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{B}([-1, 1])$.

Si $t < 0$, on a $f^{-1}(]-\infty, t]) = \emptyset \in \mathcal{B}([-1, 1])$.

Si $t \in [0, 1/2]$, on a

$$f^{-1}(]-\infty, t]) = \left[-1, -\sqrt{1-t^2}\right] \cup \left[\sqrt{1-t^2}, 1\right] \in \mathcal{B}([-1, 1]).$$

Si $t \in]1/2, 4/5[$,

$$f^{-1}(]-\infty, t]) = \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right] \in \mathcal{B}([-1, 1]).$$

Enfin, si $t \geq 4/5$, $f^{-1}(]-\infty, t]) = [-1, 1] \in \mathcal{B}([-1, 1])$.

On munit l'espace mesurable de départ $([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]))$ de la mesure μ définie pour tout $-1 \leq a \leq b \leq 1$ par $\mu([a, b]) = (1+b)^2 - (1+a)^2$.

- 5) Donner la valeur de l'intégrale

$$\int_{[-1, 1]} f \mathbb{I}_{]-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2[} d\mu,$$

où pour tout $A \subset [-1, 1]$, $\mathbb{I}_A$ est la fonction indicatrice sur A .

Il fallait remarquer que

$$f \mathbb{I}_{]-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2[} = \frac{4}{5} \mathbb{I}_{]-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2[}.$$

Ainsi, par linéarité de l'intégrale de Lebesgue,

$$\int_{[-1, 1]} f \mathbb{I}_{]-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2[} d\mu = \frac{4}{5} \mu \left(\left] -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right[\right) = \frac{8\sqrt{3}}{5}.$$