Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2023 - 2024

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Questions de cours –

1) Donner la définition de la convergence en probabilité.

2) Donner la définition de la convergence presque-sûre.

3) Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisé et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Donner la définition de l'événement $\overline{\lim} A_n$.

Exercice 1 – Pour tout $n \geq 1$, on note $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que l'on supposera indépendantes et de même loi $\mathbb{P}_X$ (i.e., pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(X_1 \in A) = \cdots = \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}_X(A)$). On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}_X(]-\infty, m]) = 1$ et, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}_X\left(]-\infty, m-\varepsilon]\right) =: r(\varepsilon) < 1.$$

On pose enfin $M_n := \max(X_1, \cdots, X_n)$.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Donner, en fonction de $r(\varepsilon)$ et de n, l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(|M_n - m| \geq \varepsilon)$.

2) Donner l'expression (en fonction de $r(\varepsilon)$) de

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|M_n - m| > \varepsilon).$$

3) Qu'en déduisez-vous quant à la convergence presque-sûre de la suite (M_n) ? (justifier votre réponse)

Exercice 2 – Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on considère la variable aléatoire réelle $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathbb{P}(X_n \leq t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathbb{P}(X_n \leq t) = [t/(1+t)]^n$ pour tout $t \geq 0$.

1) Montrer (sans utiliser la question suivante) que $1/X_n$ converge en probabilité vers 0

2) Donner l'expression de la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|1/X_n| > \varepsilon),$$

et montrer que $1/X_n$ converge presque-sûrement vers 0.

Exercice 3 – Soit $(X_n),\ n \geq 1$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1 - t^{-\theta_n} & \text{si } t \geq 1, \end{cases}$$

où (θ_n), $n \geq 1$ est une suite de réels positifs avec $\theta_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

1) Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ lorsque $n \to \infty$.

2) Si $\theta_n = 2n$, donner l'expression, en fonction de ε, de

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon).$$

En déduire que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 1$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 4 – Soit $(X_n),\ n \geq 1$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - 1/n^2$ et $\mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = 1/n^2$.

1) Calculer l'espérance et la variance de X_n.

2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n > \varepsilon - 1) = \frac{1}{n^2} \mathbb{I}_{]0,n^2[}(\varepsilon).$$

3) En utilisant le résultat de la question 2), montrer que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} -1$.

4) Montrer que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} -1$.