Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Correction

Exercice 1 – Pour tout $n \geq 1$, on note $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que l'on supposera indépendantes et de même loi $\mathbb{P}_X$ (i.e., pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(X_1 \in A) = \cdots = \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}_X(A)$). On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}_X(]-\infty, m]) = 1$ et, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}_X\left(]-\infty, m-\varepsilon]\right) =: r(\varepsilon) < 1.$$

On pose enfin $M_n := \max(X_1, \cdots, X_n)$.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Donner, en fonction de $r(\varepsilon)$ et de n, l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(|M_n - m| \geq \varepsilon)$.
Tout d'abord, remarquons que $\mathbb{P}(M_n \leq m) = [\mathbb{P}(X_1 \leq m)]^n = [\mathbb{P}_X(]-\infty, m])]^n = 1$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(|M_n - m| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n \leq m - \varepsilon) = [r(\varepsilon)]^n.$$

2) Donner l'expression (en fonction de $r(\varepsilon)$) de

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|M_n - m| > \varepsilon).$$

On a d'après la question précédente que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|M_n - m| > \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} [r(\varepsilon)]^n = \frac{r(\varepsilon)}{1 - r(\varepsilon)} < \infty.$$

3) Qu'en déduisez-vous quant à la convergence presque-sûre de la suite (M_n) ? (justifier votre réponse)
Il suffit d'utiliser le corollaire du Lemme de Borel-Cantelli et le résultat de la question 2) pour montrer que (M_n) converge presque-sûrement vers m.

Exercice 2 – Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on considère la variable aléatoire réelle $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathbb{P}(X_n \leq t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathbb{P}(X_n \leq t) = [t/(1+t)]^n$ pour tout $t > 0$.

1) Montrer (sans utiliser la question suivante) que $1/X_n$ converge en probabilité vers 0.
Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\mathbb{P}(|1/X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n < \varepsilon^{-1}) = \left(\frac{\varepsilon^{-1}}{1+\varepsilon^{-1}}\right)^n \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$ puisque $\varepsilon^{-1}/(1+\varepsilon^{-1}) \in]0,1[$.

2) Donner l'expression de la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|1/X_n| > \varepsilon),$$

et montrer que $1/X_n$ converge presque-sûrement vers 0.
D'après la question précédente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|1/X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^{-1}}{1+\varepsilon^{-1}}\right)^n = \varepsilon^{-1} < \infty.$$

D'après le point i) du lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que $1/X_n$ converge presque-sûrement vers 0.

Exercice 3 – Soit (X_n), $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1 - t^{-\theta_n} & \text{si } t \geq 1, \end{cases}$$

où (θ_n), $n \geq 1$ est une suite de réels positifs avec $\theta_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

1) Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ lorsque $n \to \infty$.
Soit $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(X_n \leq 1 + \varepsilon) = (1+\varepsilon)^{-\theta_n} \to 0,$$

ce qui prouve la convergence en probabilité.

2) Si $\theta_n = 2n$, donner l'expression, en fonction de ε, de

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon).$$

On a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} (1+\varepsilon)^{-2n} = \frac{(1+\varepsilon)^{-2}}{1-(1+\varepsilon)^{-2}} < \infty.$$

3) En déduire que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 1$ lorsque $n \to \infty$.
C'est une application directe du corollaire du Lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 4 – Soit (X_n), $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - 1/n^2$ et $\mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = 1/n^2$.

1) Calculer l'espérance et la variance de X_n.
Pour l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(X_n) = -1 \times (1 - 1/n^2) + (n^2 - 1) \times 1/n^2 = 0.$$

On a donc

$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) = (-1)^2 \times (1 - 1/n^2) + (n^2 - 1)^2 \times 1/n^2 = n^2 - 1.$$

2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n > \varepsilon - 1) = \frac{1}{n^2} \mathbb{I}_{]0,n^2[}(\varepsilon).$$

Remarquons que si $\varepsilon - 1 \geq n^2 - 1$ (c'est-à-dire si $\varepsilon \geq n^2$) alors nécessairement, $\{X_n > \varepsilon - 1\} = \emptyset$. Si $0 < \varepsilon < n^2$,

$$\mathbb{P}(X_n > \varepsilon - 1) = \mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = 1/n^2,$$

ce qui montre le résultat annoncé.

3) En utilisant le résultat de la question 2), montrer que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} -1$.
Soit $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n + 1| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > \varepsilon - 1) \to 0,$$

en ayant remarqué que $X_n + 1 \geq 0$.

4) Montrer que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} -1$.
Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n + 1| > \varepsilon) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

D'après le corollaire du lemme de Borel-Cantelli, on a le résultat annoncé.