Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2024 - 2025

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 – Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ces variables aléatoires prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X = 1) = p_1 \in]0, 1[$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = p_2 \in]0, 1[$. On pose enfin $Z := X + Y$.

1) Quelle est la loi de Z ? Donner son espérance en fonction de p_1 et p_2.

2) Donner en fonction de p_1 l'expression de l'espérance de X.

3) En remarquant que $X = \mathbb{I}_{\{X=1\}} - \mathbb{I}_{\{X=-1\}}$, donner en fonction de p_1 l'expression de $\mathbb{E}(X \mid Y = 1)$.

4) Montrer que $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X)$.

5) En déduire que $\mathbb{E}(Z \mid Y) = Y + \mathbb{E}(X)$.

6) En utilisant l'égalité $\{Z = 0\} = \{X = -1; Y = 1\} \cup \{X = 1; Y = -1\}$, donner, en fonction de p_1 et p_2, l'expression de $\mathbb{E}(X \mid Z = 0)$.

7) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid Z)$.

8) Vérifier que $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid Z)] = 2p_1 - 1$.

Exercice 2 – Soit $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi absolument continue admettant pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = c\mathbb{I}_\Delta(x, y),$$

avec $\Delta := \{x > 0, y > 0 \mid y < 1 \text{ et } y < 2x < 2 - y\}$.

1) Représenter l'ensemble Δ.

2) Quelle est la valeur de c. Justifier votre réponse.

3) Donner l'expression de la densité de Y.

4) Calculer l'espérance de Y.

5) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

Exercice 3 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1 - t^{-2} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

1) Donner l'expression de la densité de la loi de X.

2) Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donner l'expression de la densité de la loi de $X^{1/k}$.

3) Donner l'expression, en fonction de k, de $\mathbb{E}(X^{1/k})$.

On introduit à présent la variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{P}(Y = k) = p(1-p)^{k-1}$. On supposera que X et Y sont indépendantes et on pose $Z = X^{1/Y}$.

4) Donner l'expression, en fonction de k, de $\mathbb{E}(Z \mid Y = k)$. Pour répondre à cette question, on rappelle que si X et Y sont indépendantes alors, pour toutes fonctions mesurables f et g, on a $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$.

5) Donner l'expression de la fonction mesurable h telle que $\mathbb{E}(Z \mid Y) = h(Y)$.