Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2024 - 2025

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 – Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ces variables aléatoires prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X = 1) = p_1 \in]0, 1[$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = p_2 \in]0, 1[$. On pose enfin $Z := X + Y$.

1) Quelle est la loi de Z ? Donner son espérance en fonction de p_1 et p_2.
Les valeurs possibles de Z sont -2, 0 et 2. On a

$$\mathbb{P}(Z = -2) = \mathbb{P}(X = -1; Y = -1) = (1 - p_1)(1 - p_2).$$

De plus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = 0) &= \mathbb{P}(\{X = 1, Y = -1\} \cup \{X = -1, Y = 1\}) \\ &= \mathbb{P}(X = 1, Y = -1) + \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) \\ &= p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1).\end{aligned}$$

Enfin

$$\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(X = 1; Y = 1) = p_1 p_2.$$

L'espérance de Z est

$$\mathbb{E}(Z) = -2(1 - p_1)(1 - p_2) + 2p_1 p_2 = 2(p_1 + p_2 - 1).$$

2) Donner en fonction de p_1 l'expression de l'espérance de X.
On a $\mathbb{E}(X) = -(1 - p_1) + p_1 = 2p_1 - 1$.

3) En remarquant que $X = \mathbb{I}_{\{X=1\}} - \mathbb{I}_{\{X=-1\}}$, donner en fonction de p_1 l'expression de $\mathbb{E}(X \mid Y = 1)$.
Par définition

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \mid Y = 1) &= \frac{1}{\mathbb{P}(Y = 1)} \int_{\{Y=1\}} X d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}(Y = 1)} \int_{\Omega} X \mathbb{I}_{\{Y=1\}} d\mathbb{P} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(Y = 1)} \int_{\Omega} \left(\mathbb{I}_{\{X=1\}} - \mathbb{I}_{\{X=-1\}}\right) \mathbb{I}_{\{Y=1\}} d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = -1) = p_1 - (1 - p_1) = 2p_1 - 1 = \mathbb{E}(X).\end{aligned}$$

4) Montrer que $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X)$.
Comme dans la question précédente, on montre que $\mathbb{E}(X \mid Y = -1) = \mathbb{E}(X)$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{I}_{\{Y=1\}} + \mathbb{E}(X)\mathbb{I}_{\{Y=-1\}} = \mathbb{E}(X).$$

5) En déduire que $\mathbb{E}(Z \mid Y) = Y + \mathbb{E}(X)$.
On a

$$\mathbb{E}(Z \mid Y) = \mathbb{E}(X + Y \mid Y) = Y + \mathbb{E}(X \mid Y) = Y + \mathbb{E}(X).$$

6) En utilisant l'égalité $\{Z = 0\} = \{X = -1; Y = 1\} \cup \{X = 1; Y = -1\}$, donner, en fonction de p_1 et p_2, l'expression de $\mathbb{E}(X \mid Z = 0)$.
Evidemment, $Z = 0$ si et seulement si $X = -1$ et $Y = 1$ ou $X = 1$ et $Y = -1$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X \mid Z = 0) &= \frac{1}{\mathbb{P}(Z = 0)} \int_\Omega X\mathbb{I}_{\{Z=0\}} d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(Z = 0)} \int_\Omega \left(\mathbb{I}_{\{X=1\}} - \mathbb{I}_{\{X=-1\}}\right) \mathbb{I}_{\{Z=0\}} d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(Z = 0)} \int_\Omega \mathbb{I}_{\{X=1\}}\mathbb{I}_{\{Z=0\}} d\mathbb{P} - \frac{1}{\mathbb{P}(Z = 0)} \int_\Omega \mathbb{I}_{\{X=-1\}}\mathbb{I}_{\{Z=0\}} d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(Z = 0)} \int_\Omega \mathbb{I}_{\{X=1\}}\mathbb{I}_{\{Y=-1\}} d\mathbb{P} - \frac{1}{\mathbb{P}(Z = 0)} \int_\Omega \mathbb{I}_{\{X=-1\}}\mathbb{I}_{\{Y=1\}} d\mathbb{P} \\
&= \frac{p_1 - p_2}{p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)}.
\end{aligned}$$

7) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid Z)$.
On montre facilement que $\mathbb{E}(X \mid Z = -2) = -1$ et $\mathbb{E}(X \mid Z = 2) = 1$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X \mid Z) = -\mathbb{I}_{\{Z=-2\}} + \frac{p_1 - p_2}{p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)}\mathbb{I}_{\{Z=0\}} + \mathbb{I}_{\{Z=2\}}$$

8) Vérifier que $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid Z)] = 2p_1 - 1$.
D'après la question précédente, il est évident que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid Z)] &= -\mathbb{P}(Z = -2) + \frac{p_1 - p_2}{p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)}\mathbb{P}(Z = 0) + \mathbb{P}(Z = 2) \\
&= -(1 - p_1)(1 - p_2) + p_1 - p_2 + p_1p_2 = 2p_1 - 1.
\end{aligned}$$

Exercice 2 – Soit $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi absolument continue admettant pour densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = c\mathbb{I}_\Delta(x,y),$$

avec $\Delta := \{x > 0, y > 0 \mid y < 1 \text{ et } y < 2x < 2 - y\}$.

1) Représenter l'ensemble Δ.
C'est le triangle isocèle de base l'intervalle $[0,1]$ sur l'axe des abscisses et de hauteur 1.

2) Quelle est la valeur de c. Justifier votre réponse.
Pour que la fonction soit positive, il faut que $c > 0$. De plus, il faut que l'intégrale soit égale à 1. Or, l'intégrale de l'indicatrice est l'aire de Δ c'est-à-dire 1/2. Il faut donc prendre $c = 2$. On peut aussi faire le calcul en remarquant que $\mathbb{I}_\Delta(x,y) = \mathbb{I}_{[0,1]}(y)\mathbb{I}_{[y/2,1-y/2]}(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y) = c \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}_\Delta(x,y)dxdy = c \int_0^1 \int_{y/2}^{1-y/2} dxdy \\ = c \int_0^1 (1-y)dy = c/2. \end{aligned}$$

3) Donner l'expression de la densité de Y.
On sait que

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} 2\mathbb{I}_\Delta(x,y)dx = 2\mathbb{I}_{[0,1]}(y) \int_{y/2}^{1-y/2} dx = 2(1-y)\mathbb{I}_{[0,1]}(y).$$

4) Calculer l'espérance de Y.
On a

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)dy = 2\int_0^1 y(1-y)dy = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

5) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid Y)$.
On donne d'abord l'expression de la densité conditionnelle. Pour $y \in [0,1]$,

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{2\mathbb{I}_{[y/2,1-y/2]}(x)}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y}\mathbb{I}_{[y/2,1-y/2]}(x).$$

Ainsi, $\mathbb{E}(X \mid Y) = h(Y)$ avec

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y=y}(x)dx = \frac{1}{1-y}\int_{y/2}^{1-y/2} xdx = \frac{1}{2(1-y)}\left[x^2\right]_{y/2}^{1-y/2} \\ &= \frac{4(1-y)}{8(1-y)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(X \mid Y)$ est la variable aléatoire constante égale à $1/2$.

Exercice 3 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1 - t^{-2} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

1) Donner l'expression de la densité de la loi de X.
Remarquons tout d'abord que la fonction de répartition est continue. De plus, sa dérivée est
$$f_X(t) = \frac{2}{t^3}\mathbb{I}_{[1,\infty[}(t).$$
En remarquant que l'intégrale de la fonction $f_X(\cdot)$ est bien égale à 1, on a bien montré que c'était la densité de X.

2) Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donner l'expression de la densité de la loi de $X^{1/k}$.
On commence par calculer la fonction de répartition de $X^{1/k}$. On a
$$\mathbb{P}(X^{1/k} \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - x^{-2k} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$
En dérivant, on obtient
$$f_k(x) = \frac{2k}{x^{2k+1}}\mathbb{I}_{[1,\infty[}(x),$$
qui est d'intégrale 1 et donc qui est la densité de $X^{1/k}$.

3) Donner l'expression, en fonction de k, de $\mathbb{E}(X^{1/k})$.
On a
$$\mathbb{E}(X^{1/k}) = \int_{\mathbb{R}} x f_k(x) dx = 2k \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2k}} dx = \frac{2k}{2k-1}.$$

On introduit à présent la variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{P}(Y = k) = p(1-p)^{k-1}$. On supposera que X et Y sont indépendantes et on pose $Z = X^{1/Y}$.

4) Donner l'expression, en fonction de k, de $\mathbb{E}(Z \mid Y = k)$. Pour répondre à cette question, on rappelle que si X et Y sont indépendantes alors, pour toutes fonctions mesurables f et g, on a $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$.
D'après le cours,
$$\mathbb{E}(Z \mid Y = k) = \frac{1}{\mathbb{P}(Y = k)} \int_{\{Y=k\}} Z d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}(Y = k)} \int_{\Omega} Z \mathbb{I}_{\{Y=k\}} d\mathbb{P}$$

Or, il est évident que $Z\mathbb{I}_{\{Y=k\}} = X^{1/Y}\mathbb{I}_{\{Y=k\}} = X^{1/k}\mathbb{I}_{\{Y=k\}}$. En utilisant l'indépendance entre X et Y, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z \mid Y = k) &= \frac{1}{\mathbb{P}(Y = k)} \int_\Omega X^{1/k}\mathbb{I}_{\{Y=k\}} d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(Y = k)} \int_\Omega X^{1/k} d\mathbb{P} \int_\Omega \mathbb{I}_{\{Y=k\}} d\mathbb{P} = \mathbb{E}(X^{1/k}) = \frac{2k}{2k-1}.
\end{aligned}$$

5) Donner l'expression de la fonction mesurable h telle que $\mathbb{E}(Z \mid Y) = h(Y)$.
D'après la question précédente, on a

$$h(y) = \frac{2y}{2y-1}.$$