

Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie
Année 2025 - 2026

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Question de cours – Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire intégrable.

- 1) Donner la définition d'une sous tribu $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$.
- 2) Soit $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire. Quelles propriétés doit vérifier la variable aléatoire $Z : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour être l'espérance conditionnelle de X sachant Y ?

[La note attribuée à cette question prendra largement en compte la qualité de la rédaction.]

Exercice 1 – Soit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ avec $E = \{-2, -1, 1, 2\}$. La loi de X est telle que pour tout $i \in E$, $\mathbb{P}_X(\{i\}) = 1/4$. On pose enfin $Y := |X|$.

- 1) Donner la loi de la variable aléatoire Y .
- 2) Calculer les espérances de X et Y .
- 3) Donner les événements $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ tels que $\sigma(Y) = \sigma(\{A, B\})$.
- 4) Donner les valeurs des réels α et β pour lesquels on a l'égalité $X\mathbb{I}_{\{Y=1\}} = \alpha\mathbb{I}_{\{X=-1\}} + \beta\mathbb{I}_{\{X=1\}}$.
- 5) Montrer que $\mathbb{E}(X \mid Y)$ est la variable aléatoire égale à $\mathbb{E}(X)$ presque-sûrement.
- 6) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X^2 \mid Y)$.

Exercice 2 – Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La loi de X est une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et la loi de Y une loi géométrique de paramètre $q \in]0, 1[$. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. On pose enfin $Z := \min(X, Y)$.

- 1) Pour $(i, k) \in \mathbb{Z}^2$, donner l'expression (en fonction de p et q) de la probabilité $\pi_{i,k} := \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Z = k\})$. Pour ce faire, vous devrez distinguer les cas $i < k$, $i = k$ et $i > k$.

- 2) En déduire l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(Z = k)$ et ainsi que Z suit une loi géométrique dont vous préciserez le paramètre (noté $r \in]0, 1[$ dans la suite).

Soit $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dans la suite, on considère la variable aléatoire $V_i := \mathbb{I}_{\{X=i\}}$.

- 3) Quelle est la loi de V_i ? Donner son espérance.
- 4) Donner l'expression de la fonction mesurable $h : \{1, \dots, i\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(V_i | Z) = h(Z)$. Vous pourrez donner cette expression en fonction de r et des probabilités $\{\pi_{i,k}; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Exercice 3 – Soit $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi absolument continue admettant pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = cx^2y\mathbb{I}_{\Delta}(x, y),$$

avec $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ et } x/2 \leq xy \leq 1\}$.

- 1) Représenter l'ensemble Δ .
- 2) Quelle est la valeur de c . Justifier votre réponse.
- 3) Donner l'expression de la densité de Y .
- 4) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X | Y)$.