

Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie
Année 2025 - 2026

Correction

Exercice 1 – Soit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ avec $E = \{-2, -1, 1, 2\}$. La loi de X est telle que pour tout $i \in E$, $\mathbb{P}_X(\{i\}) = 1/4$. On pose enfin $Y := |X|$.

- 1) Donner la loi de la variable aléatoire Y .

La variable aléatoire Y prend les valeurs 1 et 2 avec une même probabilité de $1/2$.

- 2) Calculer les espérances de X et Y .

On a $\mathbb{E}(X) = 0.25 \times (-2 + (-1) + 1 + 2) = 0$. D'après la première question, $\mathbb{E}(Y) = 2 \times (1/2) + 1 \times (1/2) = 3/2$.

- 3) Donner les événements $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ tels que $\sigma(Y) = \sigma(\{A, B\})$.

La variable aléatoire Y ne prenant que les deux valeurs 1 ou 2, on a $\sigma(Y) = \sigma(\{Y^{-1}(\{1\}), Y^{-1}(\{2\})\})$. On a donc

$$A = Y^{-1}(\{1\}) = X^{-1}(\{-1, 1\}) \text{ et } B = Y^{-1}(\{2\}) = X^{-1}(\{-2, 2\}).$$

- 4) Donner les valeurs des réels α et β pour lesquels on a l'égalité $X\mathbb{I}_{\{Y=1\}} = \alpha\mathbb{I}_{\{X=-1\}} + \beta\mathbb{I}_{\{X=1\}}$.

On a $X\mathbb{I}_{\{Y=1\}} = X\mathbb{I}_{\{X=-1\} \cup \{X=1\}}$. Ainsi, $X\mathbb{I}_{\{Y=1\}} = -\mathbb{I}_{\{X=-1\}} + \mathbb{I}_{\{X=1\}}$ et donc $\beta = -\alpha = 1$.

- 5) Montrer que $\mathbb{E}(X | Y)$ est la variable aléatoire égale à $\mathbb{E}(X)$ presque-sûrement.

La variable aléatoire Y étant discrète,

$$\mathbb{E}(X | Y) = \mathbb{E}(X | \{Y = 1\})\mathbb{I}_{\{1\}}(Y) + \mathbb{E}(X | \{Y = 2\})\mathbb{I}_{\{2\}}(Y),$$

avec

$$\mathbb{E}(X | \{Y = 1\}) = \frac{1}{\mathbb{P}(Y = 1)} \int_{\Omega} X\mathbb{I}_{\{Y=1\}} d\mathbb{P}.$$

En utilisant la question précédente,

$$\mathbb{E}(X | \{Y = 1\}) = \frac{\mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = -1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} = 0.$$

De la même façon, on a

$$\mathbb{E}(X \mid \{Y = 2\}) = 2 \frac{\mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = -2)}{\mathbb{P}(Y = 1)} = 0.$$

Ainsi, $\mathbb{E}(X \mid Y) = 0 = \mathbb{E}(X)$.

- 6) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X^2 \mid Y)$.
Comme pour la question précédente,

$$\mathbb{E}(X^2 \mid Y) = \mathbb{E}(X^2 \mid \{Y = 1\})\mathbb{I}_{\{1\}}(Y) + \mathbb{E}(X^2 \mid \{Y = 2\})\mathbb{I}_{\{2\}}(Y),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2 \mid \{Y = 1\}) &= \frac{1}{\mathbb{P}(Y = 1)} \int_{\Omega} X^2 \mathbb{I}_{\{Y=1\}} d\mathbb{P} \\ &= 2(\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = -1)) = 1. \end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$\mathbb{E}(X^2 \mid \{Y = 2\}) = 8(\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = -2)) = 4.$$

Ainsi, $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{I}_{\{1\}}(Y) + 4\mathbb{I}_{\{2\}}(Y)$.

Exercice 2 – Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La loi de X est une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et la loi de Y une loi géométrique de paramètre $q \in]0, 1[$. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. On pose enfin $Z := \min(X, Y)$.

- 1) Pour $(i, k) \in \mathbb{Z}^2$, donner l'expression (en fonction de p et q) de la probabilité $\pi_{i,k} := \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Z = k\})$. Pour ce faire, vous devrez distinguer les cas $i < k$, $i = k$ et $i > k$.

Tout d'abord, si $i \leq 0$ ou $k \leq 0$, on a évidemment que $\pi_{i,k} = 0$. On se place donc dans le cas où $i \geq 1$ et $k \geq 1$. Si $i < k$, on a $\{X = i\} \cap \{Z = k\} = \emptyset$ car on a nécessairement $Z \leq X$. Si $i = k$, alors $\{X = i\} \cap \{Z = k\} = \{X = i\} \cap \{Y \geq i\}$. Enfin, si $i > k$, $\{X = i\} \cap \{Z = k\} = \{X = i\} \cap \{Y = k\}$. On en déduit que, pour $(i, k) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$,

$$\pi_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < k, \\ \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y \geq i) & \text{si } i = k, \\ \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k) & \text{si } i > k. \end{cases}$$

Or, si $k = i \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y \geq i) = p(1 - p)^{i-1} \sum_{j=i}^{\infty} q(1 - q)^{j-1} = p(1 - p)^{i-1}(1 - q)^{i-1}.$$

Si $i > k$,

$$\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k) = pq(1-p)^{i-1}(1-q)^{k-1}.$$

En conclusion, pour $(i, k) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$,

$$\pi_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < k, \\ p(1-p)^{i-1}(1-q)^{i-1} & \text{si } i = k, \\ pq(1-p)^{i-1}(1-q)^{k-1} & \text{si } i > k. \end{cases}$$

- 2) En déduire l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(Z = k)$ et ainsi que Z suit une loi géométrique dont vous préciserez le paramètre (noté $r \in]0, 1[$ dans la suite).

On a $\mathbb{P}(Z = k) = 0$ si $k < 1$. Pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=k}^{\infty} \pi_{i,k} = p(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1} + \sum_{i=k+1}^{\infty} pq(1-p)^{i-1}(1-q)^{k-1} \\ &= p(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1} + q(1-q)^{k-1}(1-p)^k \\ &= (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1} (p + q(1-p)). \end{aligned}$$

En posant $r = p + q(1-p)$, on a $1-r = (1-p)(1-q)$ et donc $\mathbb{P}(Z = k) = r(1-r)^{k-1}$. On a donc montré que Z suit une loi géométrique de paramètre $r = p + q - pq$.

Soit $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dans la suite, on considère la variable aléatoire $V_i := \mathbb{I}_{\{X=i\}}$.

- 3) Quelle est la loi de V_i ? Donner son   s  rance.
La variable aléatoire V_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X = i) = p(1-p)^{i-1}$ qui correspond également à son   s  rance.
- 4) Donner l'expression de la fonction mesurable $h : \{1, \dots, i\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(V_i | Z) = h(Z)$. Vous pourrez donner cette expression en fonction de r et des probabilités $\{\pi_{i,k}; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.
La variable aléatoire Z étant discrète, on a

$$\mathbb{E}(V_i | Z) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(V_i | \{Z = k\}) \mathbb{I}_{\{k\}}(Z).$$

Or,

$$\mathbb{E}(V_i | \{Z = k\}) = \frac{1}{\mathbb{P}(Z = k)} \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\{X=i\}} \mathbb{I}_{\{Z=k\}} d\mathbb{P} = \frac{\pi_{i,k}}{r(1-r)^{k-1}}.$$

On a donc, pour $k \in \{1, \dots, i\}$

$$h(k) = \frac{\pi_{i,k}}{r(1-r)^{k-1}} = \begin{cases} pq(1-p)^{i-k}/r & \text{si } 1 \leq k < i, \\ p/r & \text{si } k = i. \end{cases}$$

Exercice 3 – Soit $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi absolument continue admettant pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = cx^2y\mathbb{I}_{\Delta}(x, y),$$

avec $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ et } x/2 \leq xy \leq 1\}$.

- 1) Représenter l'ensemble Δ .

L'ensemble Δ est inclus dans le rectangle $[1, 2] \times [1/2, 1]$. C'est la partie située sous la courbe de la fonction $f(x) = 1/x$.

- 2) Quelle est la valeur de c . Justifier votre réponse.

Pour que la fonction soit une densité, il faut tout d'abord que $c > 0$. Il faut ensuite que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy = 1.$$

Or, en remarquant que

$$\begin{aligned} \Delta &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 1/2 \leq y \leq 1/x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 1/y \text{ et } 1/2 \leq y \leq 1\} \end{aligned}$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} x^2 y \mathbb{I}_{\Delta}(x, y) dx dy = \int_{1/2}^1 y \int_1^{y^{-1}} x^2 dx dy = \int_{1/2}^1 y \left(\frac{1}{3y^3} - \frac{1}{3} \right) dy = \frac{5}{24}.$$

Il faut donc prendre $c = 24/5$.

- 3) Donner l'expression de la densité de Y .

On a

$$f_Y(y) = c \int_{\mathbb{R}} x^2 y \mathbb{I}_{\Delta}(x, y) dx = cy \mathbb{I}_{[1/2, 1]}(y) \int_1^{y^{-1}} x^2 dx = \frac{c}{3} y(y^{-3} - 1) \mathbb{I}_{[1/2, 1]}(y).$$

- 4) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

Pour tout $y \in [1/2, 1]$, la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est

$$f_{X|Y=y}(x) := 3 \frac{x^2 y}{y^{-2} - y} \mathbb{I}_{[1, y^{-1}]}(x).$$

Ainsi $\mathbb{E}(X \mid Y) = h(Y)$ avec,

$$h(y) = 3 \frac{y^4}{y - y^4} \int_1^{y^{-1}} x^3 dx = \frac{3}{4} \frac{y^4(y^{-4} - 1)}{y - y^4} = \frac{3}{4} \frac{1 - y^4}{y - y^4}.$$