Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"
Année 2021 - 2022

Durée : 2h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 – Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on introduit la fonction $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_c(x) = c \exp(-2x)\bigg(\mathbb{I}_{[0,1/2[}(x) + \exp(1)\mathbb{I}_{[1,\infty[}(x)\bigg).$$

1) Donner la valeur c_0 pour laquelle la fonction f_{c_0} est une densité.

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$ de densité f_{c_0}.

2) Donner l'ensemble des valeurs prises par X.
3) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.
4) Calculer l'espérance de X. Vous pourrez utiliser le résultat suivant : pour tout $a > 0$,
$$\int_0^a x \exp(-x)dx = 1 - \exp(-a)(1 + a).$$
5) Donner l'expression de la fonction de répartition de la variable aléatoire X^2.
6) Montrer que la loi de X^2 est à densité. Vous donnerez l'expression de la densité.

Exercice 2 – Soient X_1, X_2, X_3 et Y des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Ces quatre variables aléatoires sont supposées indépendantes.

1) Rappeler la définition de l'indépendance de variables aléatoires.

Pour $j \in \{1, 2, 3\}$, la loi $\mathbb{P}_{X_j}$ de la variable aléatoire X_j est à densité de densité

$$f_j(x) = \frac{1}{j} \exp\left(-\frac{x}{j}\right) \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x).$$

La loi $\mathbb{P}_Y$ de la variable aléatoire Y est

$$\mathbb{P}_Y = \frac{1}{3}\delta_{1/3} + \frac{1}{2}\delta_{1/2} + \frac{1}{6}\delta_1.$$

2) Donner l'ensemble des valeurs possibles pour X_j. Même question pour Y.

3) Calculer l'espérance de X_j et l'espérance de Y.

On introduit la variable aléatoire

$$Z = X_1 \mathbb{I}_{\{Y=1\}} + X_2 \mathbb{I}_{\{Y=1/2\}} + X_3 \mathbb{I}_{\{Y=1/3\}}.$$

4) Montrez que la loi $\mathbb{P}_Z$ de Z est donnée pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mathbb{P}_Z(A) = \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_1 \in A) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_2 \in A) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_3 \in A).$$

5) Donner l'expression de la fonction de répartition de Z.

6) Calculer l'espérance de Z.

Exercice 3 – Pour tout $c \in]0, 1/2[$, on introduit la variable aléatoire $X_c : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_{X_c}$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mathbb{P}_{X_c}(A) = c \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \delta_i(A) + d(c) \int_A x^{-3/2} \mathbb{I}_{[1,\infty[}(x) dx,$$

où $d(c)$ est la fonction de c pour laquelle $\mathbb{P}_{X_c}$ est une mesure de probabilité (on admettra que pour tout $0 < c < 1/2$, $\mathbb{P}_{X_c}$ est une mesure).

1) Donner, en fonction de c, l'expression de $d(c)$.

2) Soit $p \in]0, 1[$. Donner, en fonction de p, la valeur de c que l'on doit prendre pour avoir $\mathbb{P}_{X_c}(\mathbb{N}) = p$.

Dans toute la suite de l'exercice, on prend $c = d(c) = 1/4$ et on note F la fonction de répartition de X_c.

3) Pour tout $t < 0$, calculer $F(t)$.

4) Pour tout $t \in [0, 1[$, calculer $F(t)$.

5) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $t \in [n, n+1[$, donner, en fonction de n et t, l'expression de $F(t)$.

6) Donner la valeur de $\alpha \in]0, 1[$, des probabilités $\{p_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ (de somme égale à 1) et de la fonction densité f telles que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}_{X_c}(A) = \alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \delta_i(A) + (1 - \alpha) \int_A f(x) dx.$$

Exercice 4 – Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$F(t) = \begin{cases} \exp(t) & \text{si } t < -1, \\ 1/2 & \text{si } t \in [-1, 1[, \\ 1 - \exp(-t) & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

1) Tracer la fonction F et vérifier qu'il s'agit bien d'une fonction de répartition.

2) Donner la valeur de $\alpha \in]0, 1[$, l'expression de la loi discrète $\mathbb{P}^{(1)}$ et la densité de la loi à densité $\mathbb{P}^{(2)}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \alpha \mathbb{P}^{(1)}(] - \infty, t]) + (1 - \alpha)\mathbb{P}^{(2)}(] - \infty, t]).$$

3) Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de fonction de répartition F. Calculer l'espérance de X (vous admettrez que X est intégrable).