Contrôle continu #2 de Probabilités

Correction

Exercice 1 – Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on introduit la fonction $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_c(x) = c \exp(-2x)\Big(\mathbb{I}_{[0,1/2[}(x) + \exp(1)\mathbb{I}_{[1,\infty[}(x)\Big).$$

1) Donner la valeur c_0 pour laquelle la fonction f_{c_0} est une densité.
Réponse – Il faut tout d'abord que f_{c_0} soit une fonction positive. On prend donc $c_0 > 0$. Il faut ensuite que f_{c_0} soit d'intégrale 1. On a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)dx &= c\int_0^{1/2} \exp(-2x)dx + c\exp(1)\int_1^{\infty} \exp(-2x)dx \\ &= \frac{c}{2}(1-\exp(-1)) + \frac{c}{2}\exp(1)\exp(-2) = \frac{c}{2}.\end{aligned}$$

Donc en prenant $c_0 = 2$, f_{c_0} est bien une densité.

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$ de densité f_{c_0}.

2) Donner l'ensemble des valeurs prises par X.
Réponse – La densité f_{c_0} est non nulle sur l'ensemble $[0,1/2[\cup[1,\infty[$ qui est donc l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

3) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.
Réponse – Par définition, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{c_0}(t)dt.$$

Ainsi, si $t < 0$ on a $F(t) = 0$. Si $t \in [0,1/2[$,

$$F(t) = c_0\int_0^t \exp(-2x)dx = \frac{c_0}{2}(1-\exp(-2t)).$$

Si $t \in [1/2,1[$,

$$F(t) = c_0\int_0^{1/2} \exp(-2x)dx = \frac{c_0}{2}(1-\exp(-1)).$$

Enfin, si $t \geq 1$,

$$\begin{aligned}F(t) &= c_0\int_0^{1/2} \exp(-2x)dx + c_0\exp(1)\int_1^t \exp(-2x)dx \\ &= \frac{c_0}{2}(1-\exp(-1)) + \frac{c_0}{2}\exp(1)(\exp(-2)-\exp(-2t) \\ &= \frac{c_0}{2}[1-\exp(1-2t)].\end{aligned}$$

4) Calculer l'espérance de X. Vous pourrez utiliser le résultat suivant : pour tout $a > 0$,
$$\int_0^a x\exp(-x)dx = 1 - \exp(-a)(1+a).$$
Réponse – Par définition

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{c_0}(x)dx = c_0 \int_0^{1/2} x\exp(-2x)dx + c_0\exp(1)\int_1^\infty x\exp(-2x)dx \\
&= \frac{c_0}{4}\int_0^1 x\exp(-x)dx + \frac{c_0}{4}\exp(1)\int_2^\infty x\exp(-x)dx.
\end{aligned}$$

En posant
$$\Gamma_1(a) = \int_0^a x\exp(-x)dx,$$
il vient
$$\mathbb{E}(X) = \frac{c_0}{4}\left(\Gamma_1(1) + \exp(1)(1-\Gamma_1(2))\right) = \frac{c_0}{4}(1+\exp(-1)).$$

5) Donner l'expression de la fonction de répartition de la variable aléatoire X^2.
Réponse – Tout d'abord, si $t < 0$, il est évident que $\mathbb{P}(X^2 \leq t) = 0$. Si $t \geq 0$,
$$G(t) := \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{t}) = F(\sqrt{t}).$$
Ainsi,
$$G(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0, \\ c_0(1-\exp(-2\sqrt{t}))/2 & si\ t \in [0,1/4[, \\ c_0(1-\exp(-1))/2 & si\ t \in [1/4,1[, \\ c_0(1-\exp(1-2\sqrt{t}))/2 & si\ t \geq 1. \end{cases}$$

6) Montrer que la loi de X^2 est à densité. Vous donnerez l'expression de la densité.
Réponse – La fonction de répartition G de X^2 est continue et dérivable λ-presque partout (partout sauf en 0, 1/4 et 1). De plus,
$$G'(t) = \frac{c_0}{2\sqrt{t}}\exp(-2\sqrt{t})\left(\mathbb{I}_{[0,1/4[}(x) + \exp(1)\mathbb{I}_{[1,\infty[}(t)\right),$$
et on a
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} G'(t)dt &= \frac{c_0}{2}\left(\int_0^{1/4} t^{-1/2}\exp(-2\sqrt{t})dt + \exp(1)\int_1^\infty t^{-1/2}\exp(-2\sqrt{t})dt\right) \\
&= \frac{c_0}{2}\left[1-\exp(-1)+\exp(1)\exp(-2)\right] = \frac{c_0}{2} = 1.
\end{aligned}$$
Donc la loi de X^2 est à densité de densité $g = G'$.

Exercice 2 – Soient X_1, X_2, X_3 et Y des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Ces quatre variables aléatoires sont supposées indépendantes.

1) Rappeler la définition de l'indépendance de variables aléatoires.

Pour $j \in \{1, 2, 3\}$, la loi $\mathbb{P}_{X_j}$ de la variable aléatoire X_j est à densité de densité

$$f_j(x) = \frac{1}{j} \exp\left(-\frac{x}{j}\right) \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x).$$

La loi $\mathbb{P}_Y$ de la variable aléatoire Y est

$$\mathbb{P}_Y = \frac{1}{3}\delta_{1/3} \ + \frac{1}{2}\delta_{1/2} + \frac{1}{6}\delta_1.$$

2) Donner l'ensemble des valeurs possibles pour X_j. Même question pour Y.
Réponse – La variable aléatoire X_j prend ses valeurs dans $[0, \infty[$. La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1/3, 1/2, 1\}$.

3) Calculer l'espérance de X_j et l'espérance de Y.
Réponse – Pour X_j, on a

$$\mathbb{E}(X_j) = \int_0^\infty x f_j(x) dx = \frac{1}{j} \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x}{j}\right) dx = j.$$

De plus,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{19}{36}.$$

On introduit la variable aléatoire

$$Z = X_1 \mathbb{I}_{\{Y=1\}} + X_2 \mathbb{I}_{\{Y=1/2\}} + X_3 \mathbb{I}_{\{Y=1/3\}}.$$

4) Montrez que la loi $\mathbb{P}_Z$ de Z est donnée pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mathbb{P}_Z(A) = \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_1 \in A) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_2 \in A) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_3 \in A).$$

Réponse – Il suffit de remarquer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_Z(A) &= \mathbb{P}(Z \in A) = \mathbb{P}(\{Z \in A\} \cap \{Y = 1\}) + \mathbb{P}(\{Z \in A\} \cap \{Y = 1/2\}) \\
&+ \mathbb{P}(\{Z \in A\} \cap \{Y = 1/3\}) \\
&= \mathbb{P}(\{X_1 \in A\} \cap \{Y = 1\}) + \mathbb{P}(\{X_2 \in A\} \cap \{Y = 1/2\}) \\
&+ \mathbb{P}(\{X_3 \in A\} \cap \{Y = 1/3\})
\end{aligned}$$

L'indépendance entre les variables aléatoires implique que

$$\mathbb{P}_Z(A) = \mathbb{P}(X_1 \in A)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X_2 \in A)\mathbb{P}(Y = 1/2) + \mathbb{P}(X_3 \in A)\mathbb{P}(Y = 1/3),$$

qui est la réponse attendue.

4) Donner l'expression de la fonction de répartition de Z.
Réponse – La fonction de répartition de Z est pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$F(t) = \mathbb{P}_Z(]-\infty, t]) = \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_1 \leq t) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_2 \leq t) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_3 \leq t).$$

Donc, si $t < 0$, $F(t) = 0$. De plus, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_j \leq t) = \int_0^t f_j(x)dx = \frac{1}{j}\int_0^t \exp\left(-\frac{x}{j}\right)dx = 1 - \exp\left(-\frac{t}{j}\right).$$

En conclusion, pour $t \geq 0$,

$$F(t) = 1 - \left[\frac{1}{6}\exp(-t) + \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{3}\exp\left(-\frac{t}{3}\right)\right].$$

5) Calculer l'espérance de Z.
Réponse – La méthode la plus simple ici est de remarquer que

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1\mathbb{I}_{\{Y=1\}}) + \mathbb{E}(X_2\mathbb{I}_{\{Y=1/2\}}) + \mathbb{E}(X_3\mathbb{I}_{\{Y=1/3\}}).$$

En utilisant l'indépendance des variables aléatoires,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{Y=1\}}) + \mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{Y=1/2\}}) + \mathbb{E}(X_3)\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{Y=1/3\}})\\ &= \mathbb{E}(X_1)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{E}(X_2)\mathbb{P}(Y=1/2) + \mathbb{E}(X_3)\mathbb{P}(Y=1/3) = \frac{13}{6}.\end{aligned}$$

On aurait également pu utiliser la formule

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^\infty (1 - F(t))dt,$$

ou bien remarquer que F est continue et dérivable λ-presque partout et que $f = F'$ est d'intégrale 1. Ainsi,

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt.$$

Exercice 3 – Pour tout $c \in]0, 1/2[$, on introduit la variable aléatoire X_c : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_{X_c}$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mathbb{P}_{X_c}(A) = c\sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i}\delta_i(A) + d(c)\int_A x^{-3/2}\mathbb{I}_{[1,\infty[}(x)dx,$$

où $d(c)$ est la fonction de c pour laquelle $\mathbb{P}_{X_c}$ est une mesure de probabilité (on admettra que pour tout $0 < c < 1/2$, $\mathbb{P}_{X_c}$ est une mesure).

1) Donner, en fonction de c, l'expression de $d(c)$.
Réponse – *Pour que* $\mathbb{P}_{X_c}$ *soit une mesure de probabilité il faut que* $\mathbb{P}_{X_c}(\mathbb{R}) = 1$. *Or,*

$$\mathbb{P}_{X_c}(\mathbb{R}) = 2c + d(c)\int_{-\infty}^{\infty} x^{-3/2}\mathbb{I}_{[1,\infty[}(x)dx = 2c + 2d(c).$$

On doit donc avoir $d(c) = 1/2 - c > 0$.

2) Soit $p \in]0,1[$. Donner, en fonction de p, la valeur de c que l'on doit prendre pour avoir $\mathbb{P}_{X_c}(\mathbb{N}) = p$.
Réponse – Il suffit de remarquer que

$$\mathbb{P}_{X_c}(\mathbb{N}) = 2c.$$

Il faut donc prendre $c = p/2$.

Dans toute la suite de l'exercice, on prend $c = d(c) = 1/4$ et on note F la fonction de répartition de X_c.

3) Pour tout $t < 0$, calculer $F(t)$.
Réponse – On a par définition

$$F(t) = \mathbb{P}_{X_c}(]-\infty, t]).$$

Evidemment, si $t < 0$, $F(t) = 0$.

4) Pour tout $t \in [0,1[$, calculer $F(t)$.
Réponse – On a

$$F(t) = \mathbb{P}_{X_c}(]-\infty, t]) = c = \frac{1}{4}.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $t \in [n, n+1[$, donner, en fonction de n et t, l'expression de $F(t)$.
Réponse – On a

$$\begin{aligned} F(t) &= \mathbb{P}_{X_c}(]-\infty, t]) = c\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} + d(c)\int_1^t x^{-3/2}dx \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

6) Donner la valeur de $\alpha \in]0,1[$, des probabilités $\{p_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ (de somme égale à 1) et de la fonction densité f telles que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}_{X_c}(A) = \alpha\sum_{i\in\mathbb{N}} p_i\delta_i(A) + (1-\alpha)\int_A f(x)dx.$$

Réponse – Comme la somme des p_i est égale à 1, on a

$$\mathbb{P}_{X_c}(\mathbb{N}) = \alpha = \frac{1}{2}$$

On a donc pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}_{X_c}(A) = \alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-(i+1)} \delta_i(A) + (1-\alpha) \int_A \frac{x^{-3/2}}{2} \mathbb{I}_{[1,\infty[}(x) dx.$$

On en déduit que $p_i = 2^{-(i+1)}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et que

$$f(x) = \frac{x^{-3/2}}{2} \mathbb{I}_{[1,\infty[}(x).$$

Exercice 4 – Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$F(t) = \begin{cases} \exp(t) & \text{si } t < -1, \\ 1/2 & \text{si } t \in [-1, 1[, \\ 1 - \exp(-t) & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

1) Tracer la fonction F et vérifier qu'il s'agit bien d'une fonction de répartition.

2) Donner la valeur de $\alpha \in]0,1[$, l'expression de la loi discrète $\mathbb{P}^{(1)}$ et la densité de la loi à densité $\mathbb{P}^{(2)}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \alpha \mathbb{P}^{(1)}(]-\infty, t]) + (1-\alpha)\mathbb{P}^{(2)}(]-\infty, t]).$$

Réponse – On remarque tout d'abord que F présente deux points de discontinuité en -1 et 1. Les deux sauts sont de hauteurs $1/2 - \exp(-1)$. Ainsi, $\alpha = 1 - 2\exp(-1)$. La loi discrète est donnée par

$$\mathbb{P}^{(1)} = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1.$$

Enfin la densité f de $\mathbb{P}^{(2)}$ est

$$f(x) = \frac{F'(x)}{1-\alpha} = \frac{1}{2}\exp(1)\left(\exp(x)\mathbb{I}_{]-\infty,-1]}(x) + \exp(-x)\mathbb{I}_{[1,\infty[}(x)\right).$$

3) Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de fonction de répartition F. Calculer l'espérance de X.
Réponse – On utilise le fait que $\mathbb{E}(X) = [\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)]/2$ où $\mathbb{E}(X_1)$ est l'espérance d'une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}^{(1)}$ et $\mathbb{E}(X_2)$ l'espérance d'une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}^{(2)}$. On a

$$\mathbb{E}(X_1) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0.$$

De plus,

$$\mathbb{E}(X_2) = \frac{\exp(1)}{2}\left(\int_{-\infty}^{-1} x\exp(x)dx + \int_1^{\infty} x\exp(-x)dx\right).$$

On sait que

$$\int_1^{\infty} x\exp(-x)dx < \infty,$$

et que, par un changement de variable,

$$\int_{-\infty}^{-1} x\exp(x)dx = -\int_1^{\infty} x\exp(-x)dx.$$

Ainsi, $\mathbb{E}(X_2) = 0$ *et donc* $\mathbb{E}(X) = 0$.