Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours “Mathématiques Appliquées” et “Actuariat”
Année 2022 - 2023

Durée : 2h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Questions de cours –

1) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Donner la définition d'une sous-tribu $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$.

2) Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire intégrable. Donner la définition de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A})$.

Exercice préliminaire – Montrer, en explicitant clairement votre calcul, que pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{\infty} x\mathrm{e}^{-x} dx = (1+a)\mathrm{e}^{-a}.$$

Vous pourrez utiliser ce résultat dans toute la suite.

Exercice 1 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire. On suppose que la loi de X admet pour densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) la fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = b\exp(-x)\mathbb{I}_{]2,\infty[}(x)$ où $b > 0$.

1) Donner les ensembles $f^{-1}(]-\infty, t])$ pour $t < 0$, $t = 0$, $t \in]0, b\mathrm{e}^{-2}[$ et $t \geq b\mathrm{e}^{-2}$. En déduire que la fonction f est mesurable.

2) Rappeler les deux propriétés que doit vérifier une fonction densité. Quelle valeur de b faut-il prendre pour que f soit une densité ?

Vous pouvez donner les résultats des questions suivantes en fonction de b si vous n'avez pas su répondre à la question 2)

3) Donner les valeurs des probabilités suivantes : $\mathbb{P}_X(]2, 3])$ et $\mathbb{P}_X(\{2\})$.
4) Calculer l'espérance de X.

On note $\lfloor x \rfloor := \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ la partie entière de x et on introduit la fonction $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{P}(E))$ définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $Y(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor$.

5) Quel est l'ensemble E des valeurs prises par la fonction Y ?

6) Montrer que Y est une variable aléatoire.

7) Montrer que pour tout $k \in E$, la loi de Y est déterminée par les valeurs $\mathbb{P}_Y(\{k\}) = (1 - \mathrm{e}^{-1})\mathrm{e}^{2-k}$.

8) Donner la valeur de l'intégrale

$$\int_\Omega Y d\mathbb{P}.$$

Vous pourrez utiliser la formule ci-dessous, valable pour tout $r \in [0,1[$.

$$\sum_{i\geq 0} ir^i = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

On introduit la variable aléatoire $Z : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_Z = \alpha \mathbb{P}_X + (1-\alpha)\mathbb{P}_Y$ avec $\alpha = 1/3$.

9) Donner les valeurs des probabilités suivantes : $\mathbb{P}_Z(]2,3])$ et $\mathbb{P}_Z(\{2\})$.

10) En utilisant les réponses aux questions 4) et 8), donner la valeur de l'espérance de Z.

Exercice 2 – On considère la fonction $x \mapsto F(x)$ avec

$$F(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x-1}/4 & \text{si } x < 1, \\ 1/3 & \text{si } x \in [1,2[, \\ 1 - 2/(3x) & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

1) Quelles sont les propriétés que doit vérifier une fonction de répartition ? La fonction F ci-dessus est-elle une fonction de répartition ?

On introduit une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour laquelle $\mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}_X(]-\infty,1])$, $\mathbb{P}_X(]-\infty,1[)$, $\mathbb{P}_X([1,3/2])$ et $\mathbb{P}_X(]1,3/2])$.

3) Donner les valeurs de $\alpha \in]0,1[$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\{p_i \in]0,1[,\ i = 1, \cdots, k\}$ ainsi que l'expression de la fonction mesurable positive f telles que

$$\mathbb{P}_X = \alpha \sum_{i=1}^{k} p_i \delta_i + (1-\alpha)\mu_f,$$

où μ_f est une mesure de probabilité de densité f (par rapport à la mesure de Lebesgue).

4) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$ on a $|X(\omega)| \geq X(\omega)\mathbb{I}_{]2,\infty[}(X(\omega))$.

5) En déduire que X n'est pas intégrable.

Exercice 3 – Soient ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On pose $\mu = \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$ où $\alpha \in]0,1[$.

1) Après avoir rappelé la définition d'une mesure de probabilité, montrer que μ est aussi une mesure de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on considère les mesures définies pour tout $c > 0$ et tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\nu_1(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \delta_i(A) \text{ et } \nu_2(A) = \int_A f(x) dx,$$

avec $p_i = c/i!$ et $f(x) = c\mathrm{e}^{1-x} \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)$.

2) Quelle valeur de c faut-il prendre pour que ν_1 et ν_2 soient des mesures de probabilité ? On rappelle que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{x^i}{i!} = \mathrm{e}^x.$$

On introduit une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_X = \mu$.

3) Après avoir rappelé la définition de la fonction de répartition F de X, donner l'expression, en fonction de α de $F(-1)$, $F(1/2)$ et $F(1)$.

4) Détailler les étapes conduisant à l'égalité

$$\mathbb{E}(X \mathbb{I}_{]1,\infty[}(X)) = \alpha(1 - \mathrm{e}^{-1}) + 2(1 - \alpha)\mathrm{e}^{-1}.$$

5) Si on note A l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 1\}$, donner l'expression, en fonction de α, de $\mathbb{E}(X \mid A)$. On rappelle que

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{E}(X \mathbb{I}_A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A X d\mathbb{P}.$$