Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Correction

Exercice préliminaire – Il suffit de faire une intégration par parties. On a

$$\int_a^\infty x\mathrm{e}^{-x}dx = \big[-x\mathrm{e}^{-x}\big]_a^\infty + \int_a^\infty \mathrm{e}^{-x}dx = a\mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-a}.$$

Exercice 1 –

1) Evidemment, si $t < 0$, $f^{-1}(]-\infty, t]) = \emptyset$. Si $t = 0$,

$$f^{-1}(]-\infty, 0]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 0\} =]-\infty, 2].$$

Si $t \in]0, b\mathrm{e}^{-2}[$,

$$f^{-1}(]-\infty, t]) =]-\infty, 2] \cup [\ln(b/t), \infty[.$$

Enfin, si $t \geq b\mathrm{e}^{-2}$, $f^{-1}(]-\infty, t]) = \mathbb{R}$. On a donc que pout tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ce qui nous assure que f est mesurable.

2) Pour être une densité, la fonction f doit être positive et d'intégrale égale à 1. Il faut donc prendre $b > 0$ et de telle sorte que

$$\int_{-\infty}^\infty b\mathrm{e}^{-x}\mathbb{I}_{]2,\infty[}(x)dx = 1.$$

Or,

$$\int_{-\infty}^\infty b\exp(-x)\mathbb{I}_{]2,\infty[}(x)dx = b\int_2^\infty \exp(-x)dx = b\mathrm{e}^{-2}.$$

Il faut donc prendre $b = \mathrm{e}^2$.

3) On a

$$\mathbb{P}_X(]2, 3]) = b\int_2^3 \exp(-x)dx = b(\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-3}) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$$

De plus, la loi de X étant à densité on a $\mathbb{P}_X(\{2\}) = 0$.

4) Comme X prend des valeurs positives, on peut calculer son intégrale. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X(x) = \int_{-\infty}^\infty x f(x)dx \\
&= b\int_2^\infty x\mathrm{e}^{-x}dx = 3b\mathrm{e}^{-2} = 3
\end{aligned}$$

5) L'ensemble E des valeurs prises par la fonction Y est $E = \{2, 3, \cdots\}$.

6) Il suffit de vérifier que pour tout $k \in E$, $Y^{-1}(\{k\}) \in \mathcal{F}$. Or,

$$Y^{-1}(\{k\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in [k, k+1[\} = X^{-1}([k, k+1[) \in \mathcal{F},$$

puisque X est une variable aléatoire.

7) L'ensemble E étant dénombrable, la variable aléatoire Y est une variable aléatoire discrète. Sa loi est donc entièrement déterminée par les valeurs $\mathbb{P}_Y(\{k\})$ avec $k \in E$. Or, en utilisant la réponse à la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_Y(\{k\}) &= \mathbb{P}_X([k, k+1[) = b \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-x} \mathbb{I}_{]2,\infty[}(x) dx \\ &= b(\mathrm{e}^{-k} - \mathrm{e}^{-k-1}) = (1 - \mathrm{e}^{-1})\mathrm{e}^{2-k}. \end{aligned}$$

8) On a

$$\begin{aligned} \int_\Omega Y d\mathbb{P} &= \int_E y \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}_Y(\{k\}) d\delta_k(y) = \sum_{k=2}^{\infty} k\mathbb{P}_Y(\{k\}) \\ &= b(1 - \mathrm{e}^{-1}) \sum_{k=2}^{\infty} k\mathrm{e}^{-k} = b(1 - \mathrm{e}^{-1}) \left(\sum_{k \geq 0} k\mathrm{e}^{-k} - \mathrm{e}^{-1} \right) \\ &= b\frac{\mathrm{e}^{-2}(2 - \mathrm{e}^{-1})}{1 - \mathrm{e}^{-1}} = \frac{2 - \mathrm{e}^{-1}}{1 - \mathrm{e}^{-1}} \end{aligned}$$

9) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_Z(]2, 3]) &= \frac{1}{3}\mathbb{P}_X(]2, 3]) + \frac{2}{3}\mathbb{P}_Y(]2, 3]) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-1}}{3} + \frac{2}{3}\mathbb{P}_Y(\{3\}) \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-1}}{3} + \frac{2b}{3}(1 - \mathrm{e}^{-1})\mathrm{e}^{-3} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-1}}{3}(1 + 2\mathrm{e}^{-1}). \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\mathbb{P}_Z(\{2\}) = 0 + \frac{2}{3}\mathbb{P}_Y(\{3\}) = \frac{2b}{3}(1 - \mathrm{e}^{-1})\mathrm{e}^{-2} = \frac{2(1 - \mathrm{e}^{-1})}{3}$$

10) On a

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{3}\mathbb{E}(X) + \frac{2}{3}\mathbb{E}(Y) = 1 + \frac{2(2 - \mathrm{e}^{-1})}{3(1 - \mathrm{e}^{-1})} = \frac{7 - 5\mathrm{e}^{-1}}{3 - 3\mathrm{e}^{-1}}.$$

Exercice 2 –

1) Une fonction de répartition est une fonction croissante, continue à droite de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. La fonction F ci-dessus vérifie clairement ces propriétés. C'est donc bien une fonction de répartition.

2) On a $\mathbb{P}_X(]-\infty,1]) = F(1) = 1/3$,

$$\mathbb{P}_X(]-\infty,1[) = \lim_{x\to 1_-} F(x) = \frac{1}{4}.$$

De plus,

$$\mathbb{P}_X([1,3/2]) = F(3/2) - \mathbb{P}_X(]-\infty,1[) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

et

$$\mathbb{P}_X(]1,3/2]) = F(3/2) - F(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

3) La valeur de α est ici donnée par la somme des probabilités des singletons c'est-à-dire par la somme de la hauteurs des sauts aux points de discontinuité de F. Les points de discontinuité sont 1 et 2, on a donc $k = 2$ et

$$\alpha = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

On en déduit facilement que

$$p_1 = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{12} = \frac{1}{5} \text{ et } p_2 = \frac{4}{5}.$$

Enfin,

$$f(x) = \frac{1}{1-\alpha}F'(x) = \frac{12}{7}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{4\mathrm{e}}\mathbb{I}_{]-\infty,1]}(x) + \frac{2}{3x^2}\mathbb{I}_{]2,\infty[}(x)\right).$$

4) Si $X(\omega) > 2$ alors $|X(\omega)| = 2 \geq X(\omega)\mathbb{I}_{]2,\infty[}(X(\omega)) = 2$. Si $X(\omega) \leq 2$ alors $|X(\omega)| \geq X(\omega)\mathbb{I}_{]2,\infty[}(X(\omega)) = 0$.

5) De la question précédente, on déduit que $\mathbb{E}(|X|) \geq \mathbb{E}(X\mathbb{I}_{]2,\infty[}(X))$. Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X\mathbb{I}_{]2,\infty[}(X)) &= \int_\Omega X\mathbb{I}_{]2,\infty[}(X)d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x\mathbb{I}_{]2,\infty[}(x)d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \alpha\sum_{i=1}^{k} ip_i\mathbb{I}_{]2,\infty[}(i) + (1-\alpha)\int_{\mathbb{R}} x\mathbb{I}_{]2,\infty[}(x)f(x)dx \\
&= 0 + \int_2^\infty \frac{8}{7x}dx = \frac{8}{7}\Big[\ln(x)\Big]_2^\infty = \infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}(|X|) = +\infty$ et donc X n'est pas intégrable.

Exercice 3 –

1) Il suffit de remarquer que $\mu(\emptyset) = \alpha\nu_1(\emptyset) + (1-\alpha)\nu_2(\emptyset) = 0$. De plus, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \alpha\nu_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) + (1-\alpha)\nu_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \\ &= \alpha\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu_1(A_n) + (1-\alpha)\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu_2(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n).\end{aligned}$$

Donc μ est bien une mesure. De plus, $\mu(\mathbb{R}) = \alpha\nu_1(\mathbb{R}) + (1-\alpha)\nu_2(\mathbb{R}) = 1$.

2) Il faut que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} p_i = 1.$$

Or,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} p_i = c\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{i!} = c\mathrm{e}^1.$$

On doit donc prendre $c = \mathrm{e}^{-1}$. On vérifie également que

$$\int_{-\infty}^{\infty} c\mathrm{e}^{1-x}\mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)dx = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}dx = 1.$$

3) Pour tout $t\in\mathbb{R}$, la fonction de répartition de X au point t est $F(t) = \mathbb{P}_X(]-\infty,t]) = \mathbb{P}(X\le t)$. Ainsi, $F(-1) = 0$,

$$\begin{aligned}F(1/2) &= \alpha\nu_1(]-\infty,1/2]) + (1-\alpha)\nu_2(]-\infty,1/2]) = \alpha p_0 + (1-\alpha)\int_0^{1/2}\mathrm{e}^{-x}dx \\ &= \alpha\mathrm{e}^{-1} + (1-\alpha)(1-\mathrm{e}^{-1/2}).\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}F(1) &= \alpha\nu_1(]-\infty,1]) + (1-\alpha)\nu_2(]-\infty,1]) = \alpha(p_0+p_1) + (1-\alpha)\int_0^1\mathrm{e}^{-x}dx \\ &= 2\alpha\mathrm{e}^{-1} + (1-\alpha)(1-\mathrm{e}^{-1}).\end{aligned}$$

4) On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X\mathbb{I}_{]1,\infty[}(X)) &= \int_\Omega X\mathbb{I}_{]1,\infty[}(X)d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x\mathbb{I}_{]1,\infty[}(x)d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \alpha\int_{\mathbb{R}} x\mathbb{I}_{]1,\infty[}(x)d\nu_1(x) + (1-\alpha)\int_{\mathbb{R}} x\mathbb{I}_{]1,\infty[}(x)d\nu_2(x) \\ &= \alpha\sum_{i\in\mathbb{N}} p_i\int_{\mathbb{R}} x\mathbb{I}_{]1,\infty[}(x)d\delta_i(x) + (1-\alpha)\int_{\mathbb{R}} x\mathbb{I}_{]1,\infty[}(x)f(x)dx \\ &= \alpha\mathrm{e}^{-1}\sum_{i\ge 2}\frac{i}{i!} + (1-\alpha)\int_1^{\infty} x\mathrm{e}^{-x}dx.\end{aligned}$$

Or,
$$\sum_{i\geq 2}\frac{i}{i!}=\sum_{i\geq 2}\frac{1}{(i-1)!}=\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i!}=\mathrm{e}^1-1,$$
et, d'après le résultat de l'exercice préliminaire,
$$\int_1^\infty x\mathrm{e}^{-x}dx=2\mathrm{e}^{-1}.$$
On en déduit ensuite facilement le résultat attendu.

5) D'après le cours, on sait que
$$\mathbb{E}(X\mid A)=\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{I}_A).$$
Or, $\mathbb{P}(A)=1-F(1)$ et $\mathbb{I}_A=\mathbb{I}_{]1,\infty[}(X)$. Ainsi, d'après les questions précédentes,
$$\mathbb{E}(X\mid A)=1-\frac{\alpha(1-\mathrm{e}^{-1})+2(1-\alpha)\mathrm{e}^{-1}}{2\alpha\mathrm{e}^{-1}+(1-\alpha)(1-\mathrm{e}^{-1})}.$$