Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques

Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"

Année 2023 - 2024

Durée : 2h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 – On se place sur l'espace mesurable $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$. On définit sur cet espace une mesure μ_1 donnée par

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{4} p_i \delta_{i/4},$$

avec $p_1 = 1/4$, $p_2 = 1/8$ et $p_3 = 1/4$.

1) Donner la valeur de p_4 pour que μ_1 soit une mesure de probabilité.

2) Soit $X_1 : (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1) \to ([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ une variable aléatoire de loi μ_1. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.

On définit à présent sur l'espace $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ la mesure μ_2 qui est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue de densité $f(x) = 3x^2\mathbb{I}_{[0,1]}(x)$.

3) Soit $X_2 : (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2) \to ([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ une variable aléatoire de loi μ_2. Donner l'expression de la fonction de répartition F_2 de X_2. Calculer $\mathbb{E}(X_2)$.

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to ([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ une variable aléatoire de loi $\mu = \mu_1/3 + 2\mu_2/3$.

4) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

5) Calculer l'espérance de X.

Exercice 2 – Soit $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire dont la loi est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue) de densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = c\exp(-y)\mathbb{I}_\Delta(x,y),$$

avec $c > 0$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < y\}$.

1) Donner la valeur de c pour que $f_{(X,Y)}$ soit une densité.

2) Quelle est l'expression de la densité de X ? Celle de Y ?

3) Donner l'expression de la fonction mesurable $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle $\mathbb{E}(X \mid Y) = h(Y)$.

4) Calculer $\mathbb{E}[h(Y)]$.

Exercice 3 – Soit $E \subset \mathbb{R}$ et soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{B}(E))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$. On suppose que la fonction de répartition de X est donnée par la fonction $F(\cdot)$ telle que $F(t) = 0$ si $t < 0$,

$$F(t) = 1 - \frac{1}{i+1}\exp(-t),$$

pour tout $t \in [i, i+1[$ avec $i \in \{0,1,2\}$ et enfin $F(t) = 1$ si $t \geq 3$.

1) Tracer la représentation graphique de la fonction $F(\cdot)$.

2) Quel est l'ensemble E des valeurs prises par la variable aléatoire X ?

Dans la suite de l'exercice, vous donnerez vos résultats en fonction de $\exp(-1)$, $\exp(-2)$ et $\exp(-3)$. On rappelle également que si $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ est une variable aléatoire positive alors

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > t)dt.$$

3) Calculer l'espérance de X.

4) Donner les valeurs des probabilités $\mathbb{P}_X(\{3\})$, $\mathbb{P}(X=2)$ et $\mathbb{P}(X^{-1}\{1/2\})$.

5) Montrer que $\mathbb{P}_X = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$ où μ_1 est une mesure de probabilité discrète et μ_2 une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Vous préciserez la valeur de α, l'expression de μ_1 et donnerez la densité de μ_2.

6) Calculer l'espérance de X en utilisant la formule

$$\mathbb{E}(X) = \int_E x d\mathbb{P}_X(x).$$

Exercice 4 – Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $f_n : ([0,1[, \mathcal{B}([0,1[)) \mapsto (E_n, \mathcal{P}(E_n))$ définie pour tout $\omega \in [0,1[$ par

$$f_n(\omega) := \sum_{i=1}^{2^n} \ln\left(\frac{2^n}{i}\right) \mathbb{I}_{[(i-1)/2^n, i/2^n[}(\omega),$$

où E_n est l'ensemble des valeurs prises par f_n.

1) Quel est le cardinal de l'ensemble E_n.

2) Montrer que f_n est une fonction étagée positive.

3) En utilisant le fait que pour tout $i \in \{1, \cdots, 2^n\}$,

$$\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right[= \left[\frac{2i-2}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}\right[\bigcup \left[\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}\right[,$$

montrer que (f_n) est une suite croissante.

4) On munit l'ensemble $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[))$ d'une mesure μ. Donner, en fonction de n et de μ, l'expression de l'intégrale de Lebesgue

$$I_n := \int_{[0,1[} f_n d\mu.$$

5) En utilisant le fait que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{N}{i}\right) = 1,$$

et en admettant que $f_n \to f$ lorsque $n \to \infty$ avec $f(x) = \ln(1/x)$, donner la valeur de l'intégrale de Lebesgue

$$\int_{[0,1[} f d\mu,$$

lorsque $\mu = \lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue.