Contrôle continu #2 de Probabilités

CORRECTION

Année 2023 - 2024

Exercice 1 – On se place sur l'espace mesurable $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. On définit sur cet espace une mesure μ_1 donnée par

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{4} p_i \delta_{i/4},$$

avec $p_1 = 1/4$, $p_2 = 1/8$ et $p_3 = 1/4$.

1) Donner la valeur de p_4 pour que μ_1 soit une mesure de probabilité.
   Pour que μ_1 soit une mesure de probabilité, il faut que $p_1+p_2+p_3+p_4 = 1$
   Donc, $p_4 = 3/8$.

2) Soit $X_1 : (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1) \to ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ une variable aléatoire de loi μ_1. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.
   On a, en utilisant le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(X_1) = \int_{\Omega_1} X_1 d\mathbb{P}_1 = \int_{[0,1]} x d\mu_1(x) = \sum_{i=1}^{4} \frac{ip_i}{4} = \frac{11}{16}.$$

On définit à présent sur l'espace $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ la mesure μ_2 qui est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue de densité $f(x) = 3x^2 \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$.

3) Soit $X_2 : (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2) \to ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ une variable aléatoire de loi μ_2. Donner l'expression de la fonction de répartition F_2 de X_2. Calculer $\mathbb{E}(X_2)$.
   La variable X_2 est à support sur $[0,1]$. En effet,

$$\mathbb{P}(X_2 \in [0,1]) = \int_{[0,1]} f(x)dx = 1.$$

   Donc, si $t < 0$, $F_2(t) = 0$ et si $t \geq 1$, $F_2(t) = 1$. Si $t \in [0,1[$,

$$F_2(t) = \int_0^t f(x)dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^t = t^3.$$

   L'espérance de X_2 est

$$\mathbb{E}(X_2) = \int_{\Omega_2} X_2 d\mathbb{P}_2 = \int_{[0,1]} x d\mu_2(x) = \int_{[0,1]} x f(x)dx = 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ une variable aléatoire de loi $\mu = \mu_1/3 + 2\mu_2/3$.

4) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.
Pour $t \in \mathbb{R}$, il s'agit de calculer

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mu(]-\infty, t]) = \frac{1}{3}\mu_1(]-\infty, t]) + \frac{2}{3}\mu_2(]-\infty, t]).$$

Si $t < 0$, $F(t) = 0$. Si $t \in [0, 1/4[$,

$$F(t) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3}\int_{]-\infty,t]} f(x)dx = \frac{2t^3}{3}.$$

Si $t \in [1/4, 1/2[$,

$$F(t) = \frac{1}{3} \times p_1 + \frac{2t^3}{3} = \frac{1}{12} + \frac{2t^3}{3}.$$

De la même façon, si $t \in [1/2, 3/4[$, $F(t) = 1/8 + 2t^3/3$, si $t \in [3/4, 1[$, $F(t) = 5/24 + 2t^3/3$ et $F(t) = 1$ si $t \geq 1$. En conclusion,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 2t^3/3 & \text{si } t \in [0, 1/4[, \\ 1/12 + 2t^3/3 & \text{si } t \in [1/4, 1/2[, \\ 1/8 + 2t^3/3 & \text{si } t \in [1/2, 3/4[, \\ 5/24 + 2t^3/3 & \text{si } t \in [3/4, 1[, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

5) Calculer l'espérance de X.
La façon la plus simple pour calculer l'espérance est de remarquer que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_1) + \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_2) = \frac{35}{48}.$$

On peut sinon utiliser la formule,

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_{[0,1]} x d\mu(x).$$

Exercice 2 – Soit $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire dont la loi est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue) de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = c\exp(-y)\mathbb{I}_\Delta(x, y),$$

avec $c > 0$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < y\}$.

1) Donner la valeur de c pour que $f_{(X,Y)}$ soit une densité.
Il faut prendre c de telle sorte que

$$\int_\Delta f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = 1.$$

Or,

$$\int_\Delta f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = c\int_0^\infty \int_0^y \exp(-y)dxdy = c\int_0^\infty y\exp(-y)dy = c.$$

Il faut donc prendre $c = 1$.

2) Quelle est l'expression de la densité de X ? Celle de Y ?
Pour la densité de X, il faut intégrer la densité du couple par rapport à y. On a donc

$$f_X(x) = \int_\mathbb{R} \exp(-y)\mathbb{I}_\Delta(x,y)dy = \mathbb{I}_{]0,\infty[}(x)\int_x^\infty \exp(-y)dy = \exp(-x)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(x).$$

On reconnait la densité d'une loi exponentielle. De même,

$$f_Y(y) = \int_\mathbb{R} \exp(-y)\mathbb{I}_\Delta(x,y)dx = \exp(-y)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(y)\int_0^y dx = y\exp(-y)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(y).$$

3) Donner l'expression de la fonction mesurable $h : (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour laquelle $\mathbb{E}(X \mid Y) = h(Y)$.
On donne tout d'abord l'expression de la densité conditionnelle. Pour tout $y > 0$,

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{\exp(-y)\mathbb{I}_{]0,y[}(x)}{y\exp(-y)} = \frac{1}{y}\mathbb{I}_{]0,y[}(x).$$

On reconnait la densité d'une loi uniforme sur $[0,y]$. Ainsi,

$$h(y) = \int_\mathbb{R} \frac{x}{y}\mathbb{I}_{]0,y[}(x)dx = \frac{1}{y}\int_0^y xdx = \frac{1}{2y}y^2 = \frac{y}{2}.$$

4) Calculer $\mathbb{E}[h(Y)]$.
On sait que $\mathbb{E}[h(Y)] = \mathbb{E}(X) = 1$.

Exercice 3 – Soit $E \subset \mathbb{R}$ et soit $X : (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to (E,\mathcal{B}(E))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$. On suppose que la fonction de répartition de X est donnée par la fonction $F(\cdot)$ telle que $F(t) = 0$ si $t < 0$,

$$F(t) = 1 - \frac{1}{i+1}\exp(-t),$$

pour tout $t \in [i, i+1[$ avec $i \in \{0,1,2\}$ et enfin $F(t) = 1$ si $t \geq 3$.

1) Tracer la représentation graphique de la fonction $F(\cdot)$.

2) Quel est l'ensemble E des valeurs prises par la variable aléatoire X ?
La fonction de répartition est constante uniquement lorsque $t < 0$ ou $t > 3$. Ainsi, l'ensemble E est l'intervalle $[0, 3]$.

Dans la suite de l'exercice, vous donnerez vos résultats en fonction de $\exp(-1)$, $\exp(-2)$ et $\exp(-3)$. On rappelle également que si $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ est une variable aléatoire positive alors

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > t)dt.$$

3) Calculer l'espérance de X.
On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F(t))dt &= \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{i+1} \int_i^{i+1} \exp(-t)dt \\ &= 1 - \frac{1}{2}\exp(-1) - \frac{1}{6}\exp(-2) - \frac{1}{3}\exp(-3).\end{aligned}$$

4) Donner les valeurs des probabilités $\mathbb{P}_X(\{3\})$, $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X^{-1}\{1/2\})$.
On a $\mathbb{P}_X(\{3\}) = \mathbb{P}(X = 3)$ qui est la hauteur du saut au point $t = 3$. On a donc $\mathbb{P}_X(\{3\}) = 1 - (1 - \exp(-3)/3) = \exp(-3)/3 \approx 0.0166$. De même, on a $\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \exp(-2)/3 - (1 - \exp(-2)/2) = \exp(-2)/6 \approx 0.0226$. Enfin, $\mathbb{P}(X^{-1}\{1/2\}) = 0$.

5) Montrer que $\mathbb{P}_X = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$ où μ_1 est une mesure de probabilité discrète et μ_2 une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Vous préciserez la valeur de α, l'expression de μ_1 et donnerez la densité de μ_2.
La valeur de α est la somme de la hauteur des 3 sauts. On a donc

$$\alpha = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{2}\exp(-1) + \frac{1}{6}\exp(-2) + \frac{1}{3}\exp(-3).$$

On a donc

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{3} p_i \delta_i,$$

avec $p_1 = \exp(-1)/(2\alpha)$, $p_2 = \exp(-2)/(6\alpha)$ et $p_3 = \exp(-3)/(3\alpha)$. Enfin, pour trouver la densité $f(\cdot)$ de la loi μ_2, on calcule la dérivée de F (du moins presque-partout). On a :

$$F'(t) = \sum_{i=0}^{2} \frac{\exp(-t)}{i+1} \mathbb{I}_{[i,i+1[}(t)$$

On vérifie que

$$\int_{\mathbb{R}} F'(t)dt = 1 - \alpha.$$

Ainsi,

$$f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=0}^{2} \frac{\exp(-t)}{i+1} \mathbb{I}_{[i,i+1[}(t)$$

6) Calculer l'espérance de X en utilisant la formule

$$\mathbb{E}(X) = \int_E x d\mathbb{P}_X(x).$$

On a

$$\mathbb{E}(X) = \alpha \int_E x d\mu_1(x) + (1-\alpha) \int_E x d\mu_2(x).$$

Or,

$$\alpha \int_E x d\mu_1(x) = \alpha \sum_{i=1}^{3} i p_i = \frac{1}{2}\exp(-1) + \frac{1}{3}\exp(-2) + \exp(-3).$$

De plus

$$(1-\alpha) \int_E x d\mu_2(x) = \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{i+1} \int_i^{i+1} t\exp(-t)dt = 1 - \frac{1}{2}\exp(-1) - \frac{1}{6}\exp(-2) - \frac{1}{3}\exp(-3).$$

En sommant les deux derniers résultats, on trouve $\mathbb{E}(X) = 1 - \alpha$ qui est la valeur trouvée à la question 3).

Exercice 4 – Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $f_n : ([0,1[, \mathcal{B}([0,1[)) \mapsto (E_n, \mathcal{P}(E_n))$ définie pour tout $\omega \in [0,1[$ par

$$f_n(\omega) := \sum_{i=1}^{2^n} \ln\left(\frac{2^n}{i}\right) \mathbb{I}_{[(i-1)/2^n, i/2^n[}(\omega),$$

où E_n est l'ensemble des valeurs prises par f_n.

1) Quel est le cardinal de l'ensemble E_n.
On a $\text{Card}(E_n) = 2^n$.

2) Montrer que f_n est une fonction étagée positive.
Il suffit de remarquer que

$$f_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i},$$

où $k = 2^n$, $\alpha_i = \ln(2^n/i)$ et $A_i = [(i-1)/2^n, i/2^n[$ qui sont bien des éléments de $\mathcal{B}([0,1[)$ formant une partition de $[0,1[$.

3) En utilisant le fait que pour tout $i \in \{1, \cdots, 2^n\}$,

$$\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right[= \left[\frac{2i-2}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}\right[\bigcup \left[\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}\right[,$$

montrer que (f_n) est une suite croissante.
Pour tout $x \in [0,1[$, il existe i tel que $x \in [(i-1)/2^n, i/2^n[$. Ainsi, $f_n(x) = \ln(2^n/i)$. De plus, d'après la remarque, on a soit

$$f_{n+1}(x) = \ln\left(\frac{2^{n+1}}{2i-1}\right) = \ln\left(\frac{2^n}{i-1/2}\right) > \ln(2^n/i) = f_n(x),$$

soit

$$f_{n+1}(x) = \ln\left(\frac{2^{n+1}}{2i}\right) = \ln\left(\frac{2^n}{i}\right) = f_n(x).$$

On a donc bien montré que (f_n) est une suite croissante.

4) On munit l'ensemble $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[))$ d'une mesure μ. Donner, en fonction de n et de μ, l'expression de l'intégrale de Lebesgue

$$I_n := \int_{[0,1[} f_n d\mu.$$

En utilisant la question 2), on a

$$I_n := \int_{[0,1[} f_n d\mu = \sum_{i=1}^{2^n} \ln\left(\frac{2^n}{i}\right) \mu\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right[\right).$$

5) En utilisant le fait que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{N}{i}\right) = 1,$$

et en admettant que $f_n \to f$ lorsque $n \to \infty$ avec $f(x) = \ln(1/x)$, donner la valeur de l'intégrale de Lebesgue

$$\int_{[0,1[} f d\mu,$$

lorsque $\mu = \lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue.
On a montré que (f_n) est une suite croissante de fonctions étagées positives donc on admettra qu'elle converge vers f. Ainsi, d'après le théorème de la convergence monotone,

$$\int_{[0,1[} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1[} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} \ln\left(\frac{2^n}{i}\right) = 1.$$

On remarque donc que cette intégrale coïncide avec celle de Riemann.