

Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours “Mathématiques Appliquées” et “Actuariat”
Année 2024 - 2025

Durée : 1h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1 – Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable

- 1) Donner la définition précise d’une fonction étagée positive $g : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$.
- 2) Soit $A \subset E$. Compléter la phrase “la fonction $\mathbb{I}_A : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$ est mesurable si et seulement si ...”

Exercice 2 – On note $\lfloor x \rfloor := \sup\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$ la partie entière de x et on introduit la fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor \cos(x) \rfloor \mathbb{I}_{[0, 2\pi]}(x)$.

- 1) Donner l’ensemble E des valeurs prises par la fonction f .
- 2) Donner les ensembles $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$. La fonction f est-elle mesurable ? (justifier votre réponse).
- 3) La fonction f est-elle intégrable (au sens de Lebesgue) par rapport à la mesure de Lebesgue λ ? Si oui, donner la valeur de cette intégrale.

Exercice 3 – Un sac contient $n = 4$ boules. Il y a $n_1 = 2$ boules blanches, les 2 boules restantes étant noires. On considère l’expérience aléatoire consistant à tirer (sans remise) une boule du sac jusqu’à l’obtention d’une boule noire.

- 1) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience.

On introduit la fonction $X : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le nombre de tirages nécessaires.

- 2) Donner l’ensemble E des valeurs prises par X et montrer que X est une variable aléatoire.
- 3) Donner la loi de X .
- 4) Si elle existe, donner l’espérance de X .
- 5) [**Question bonus, à traiter à la fin!**] Reprendre les questions précédentes pour un nombre $n \geq 2$ quelconque de boules dans le sac avec $n_1 \in \{1, \dots, n-1\}$ boules blanches.

Exercice 4 – On introduit la fonction $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\{-1, 0, 1\}, \mathcal{P}(\{-1, 0, 1\}))$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- 1) La fonction g est-elle mesurable ? Justifier correctement votre réponse.

On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dont la loi \mathbb{P}_X est telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_X(] - \infty, t]) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} \exp(t)/2 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \exp(-t)/2 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

- 2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, donner les expressions des probabilités suivantes :
 $\mathbb{P}(|X| \leq t)$; $\mathbb{P}(g(X) = 1)$ et $\mathbb{P}(\{g(X) = 1\} \cap \{|X| \leq t\})$.
- 3) Montrer que X et $g(X)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.