

Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"
Année 2024 - 2025

Durée : 1h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1 – Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable

- 1) Donner la définition précise d'une fonction étagée positive $g : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$.

C'est une fonction d'expression générale

$$g(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{I}_{A_i},$$

où les α_i sont des réels positifs ou nuls et A_1, \dots, A_k sont des éléments de \mathcal{E} qui forment une partition de E .

- 2) Soit $A \subset E$. Compléter la phrase "la fonction $\mathbb{I}_A : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$ est mesurable si et seulement si ..."
... $A \in \mathcal{E}$.

Exercice 2 – On note $[x] := \sup\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$ la partie entière de x et on introduit la fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = [\cos(x)] \mathbb{I}_{[0, 2\pi]}(x)$.

- 1) Donner l'ensemble E des valeurs prises par la fonction f .
L'ensemble E est l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$.
- 2) Donner les ensembles $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$. La fonction f est-elle mesurable ? (justifier votre réponse).
La partie entière de $\cos(x)$ est nulle lorsque $x < 0$ ou bien $x > 2\pi$ ou encore si $x \in]0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi[$. Ainsi,

$$f^{-1}(\{0\}) =]-\infty, 0[\cup]0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi[\cup]2\pi, \infty[.$$

De plus, $f^{-1}(\{1\}) = \{0, 2\pi\}$. Pour montrer que f est mesurable, il reste à remarquer que $f^{-1}(\{-1\}) =]\pi/2, 3\pi/2[$ et que les trois ensembles, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont des éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

- 3) La fonction f est-elle intégrable (au sens de Lebesgue) par rapport à la mesure de Lebesgue λ ? Si oui, donner la valeur de cette intégrale.
On remarque tout d'abord que $|f| = 0 \times \mathbb{I}_{f^{-1}(\{0\})} + 1 \times \mathbb{I}_{f^{-1}(\{-1\}) \cup f^{-1}(\{1\})}$.
On a ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda = \lambda(f^{-1}(\{-1\}) \cup f^{-1}(\{1\})) = \pi.$$

Donc f est intégrable au sens de Lebesgue et, comme $f = -1 \times \mathbb{I}_{f^{-1}(\{-1\})} + 0 \times \mathbb{I}_{f^{-1}(\{0\})} + 1 \times \mathbb{I}_{f^{-1}(\{1\})}$. On a ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda = -\lambda(f^{-1}(\{-1\})) + \lambda(f^{-1}(\{1\})) = -\pi.$$

Exercice 3 – Un sac contient $n = 4$ boules. Il y a $n_1 = 2$ boules blanches, les 2 boules restantes étant noires. On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer (sans remise) une boule du sac jusqu'à l'obtention d'une boule noire.

- 1) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience.

L'ensemble des réalisations possibles est $\Omega = \{N, BN, BBN\}$ où l'élément N correspond au résultat "obtenir une boule noire au premier tirage", l'élément BN au résultat "obtenir une boule noire au second tirage" et l'élément BBN au résultat "obtenir une boule noire au troisième tirage". Evidemment, on prend $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Enfin, pour définir la mesure de probabilité \mathbb{P} , il suffit de donner les valeurs $\mathbb{P}(\{N\})$, $\mathbb{P}(\{BN\})$ et $\mathbb{P}(\{BBN\})$. Comme il y a 2 boules noires parmi les 4 boules du sac, on a $\mathbb{P}(\{N\}) = 2/4 = 1/2$. L'événement $\{BN\}$ est réalisé lorsque l'on tire d'abord une boule blanche (parmi les 4 du sac) et une boule noire parmi les 3 restantes ce qui donne $\mathbb{P}(\{BN\}) = 2/4 \times 2/3 = 1/3$. Enfin, avec un raisonnement identique, on a $\mathbb{P}(\{BBN\}) = 2/4 \times 1/3 \times 1 = 1/6$. On vérifie bien que la somme des ces trois probabilités est égale à 1.

On introduit la fonction $X : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le nombre de tirages nécessaires.

- 2) Donner l'ensemble E des valeurs prises par X et montrer que X est une variable aléatoire.

L'ensemble des valeurs possibles pour X est $E = \{1, 2, 3\}$. Comme la tribu de départ est celle de l'ensemble des parties de Ω , la fonction X est nécessairement mesurable autrement dit X est une variable aléatoire.

- 3) Donner la loi de X .

Comme la tribu $\mathcal{P}(E)$ est engendrée par l'ensemble contenant les trois singletons $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$, la loi est entièrement déterminée par les probabilités $\mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{1\})) = \mathbb{P}(\{N\}) = 1/2$; $\mathbb{P}_X(\{2\}) = \mathbb{P}(\{BN\}) = 1/3$ et $\mathbb{P}_X(\{3\}) = 1/6$.

- 4) Si elle existe, donner l'espérance de X .

On a

$$X = 1 \times \mathbb{I}_{\{N\}} + 2 \times \mathbb{I}_{\{BN\}} + 3 \times \mathbb{I}_{\{BBN\}}.$$

Ainsi, X est une fonction étagée positive et on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$$

- 5) Reprendre les questions précédentes pour un nombre $n \geq 2$ quelconque de boules dans le sac avec $n_1 \in \{1, \dots, n-1\}$ boules blanches. L'ensemble des réalisations possibles est $\Omega = \{0\text{BN}, 1\text{BN}, 2\text{BN}, \dots, n_1\text{BN}\}$ où l'élément $i\text{BN}$ correspond au résultat "obtenir la boule noire au $i+1$ -ième tirage". La tribu associée est $\mathcal{P}(\Omega)$ et on a

$$\mathbb{P}(\{0\text{BN}\}) = \frac{n - n_1}{n},$$

et pour $i = 1, \dots, n_1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{i\text{BN}\}) &= \frac{n_1}{n} \times \frac{n_1 - 1}{n - 1} \times \dots \times \frac{n_1 - i + 1}{n - i + 1} \times \frac{n - n_1}{n - i} \\ &= (n - n_1) \frac{(n - i - 1)!}{n!} \frac{n_1!}{(n_1 - i)!}. \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs prises par X est $E = \{1, \dots, n_1 + 1\}$ et X est une variable aléatoire de loi

$$\mathbb{P}_X(\{i\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{i\})) = \mathbb{P}(\{(i-1)\text{BN}\}), \quad i = 1, \dots, n_1 + 1.$$

Enfin,

$$X = \sum_{i=1}^{n_1+1} i \mathbb{I}_{\{(i-1)\text{BN}\}}$$

est une fonction étagée positive et on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n_1+1} i(n - n_1) \frac{(n - i)!}{n!} \frac{n_1!}{(n_1 - i + 1)!}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(n + 1 - X) &= \sum_{i=1}^{n_1+1} (n - n_1) \frac{(n + 1 - i)!}{n!} \frac{n_1!}{(n_1 - i + 1)!} \\ &= (n + 1) \frac{n - n_1}{n - n_1 + 1} \sum_{i=1}^{n_1+1} (n + 1 - n_1) \frac{(n + 1 - i)!}{(n + 1)!} \frac{n_1!}{(n_1 - i + 1)!} \end{aligned}$$

Or, on sait que pour $n_1 < n$,

$$\sum_{i=1}^{n_1+1} (n - n_1) \frac{(n - i)!}{n!} \frac{n_1!}{(n_1 - i + 1)!} = 1.$$

En remplaçant n par $n + 1$ on a donc

$$\sum_{i=1}^{n_1+1} (n + 1 - n_1) \frac{(n + 1 - i)!}{(n + 1)!} \frac{n_1!}{(n_1 - i + 1)!} = 1.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(n+1-X) = (n+1) \frac{n-n_1}{n-n_1+1}.$$

En conclusion,

$$\mathbb{E}(X) = n+1 - (n+1) \frac{n-n_1}{n-n_1+1} = \frac{n+1}{n+1-n_1}.$$

Exercice 4 – On introduit la fonction $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\{-1, 0, 1\}, \mathcal{P}(\{-1, 0, 1\}))$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1) La fonction g est-elle mesurable ? Justifier correctement votre réponse.

Pour montrer que g est mesurable, il suffit de montrer que les pré-images des singletons de $\mathcal{P}(\{-1, 0, 1\})$ appartiennent à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Or, $g^{-1}(\{1\}) =]-\infty, 0[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $g^{-1}(\{0\}) = \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $g^{-1}(\{-1\}) =]0, \infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc g est bien mesurable.

On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dont la loi \mathbb{P}_X est telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} \exp(t)/2 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \exp(-t)/2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, donner les expressions des probabilités suivantes :

$\mathbb{P}(|X| \leq t)$; $\mathbb{P}(g(X) = 1)$ et $\mathbb{P}(\{g(X) = 1\} \cap \{|X| \leq t\})$.

On a $\mathbb{P}(|X| \leq t) = 0$ si $t < 0$ et, si $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \leq t) = \mathbb{P}(-t \leq X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) - \mathbb{P}(X < -t).$$

La fonction $t \mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$ étant croissante et continue, on a pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) - \mathbb{P}(X \leq -t) = 1 - \frac{\exp(-t)}{2} - \frac{\exp(-t)}{2} = 1 - \exp(-t).$$

De plus,

$$\mathbb{P}(g(X) = 1) = \mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

Enfin, $\mathbb{P}(\{g(X) = 1\} \cap \{|X| \leq t\}) = 0$ si $t < 0$ et, si $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{g(X) = 1\} \cap \{|X| \leq t\}) &= \mathbb{P}(0 < X \leq t) = 1 - \frac{\exp(-t)}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\exp(-t)}{2}. \end{aligned}$$

On remarque en particulier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(\{g(X) = 1\} \cap \{|X| \leq t\}) = \mathbb{P}(g(X) = 1) \times \mathbb{P}(|X| \leq t).$$

- 3) Montrer que X et $g(X)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.
Pour montrer que X et $g(X)$ sont deux variables aléatoires indépendantes, il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}(\{g(X) = i\} \cap \{|X| \leq t\}) = \mathbb{P}(g(X) = i) \times \mathbb{P}(|X| \leq t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $i \in \{-1, 0, 1\}$. On a montré dans la question précédente ce résultat pour $i = 1$. La démonstration pour les cas $i = 0$ et $i = -1$ est en tout point identique.