Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques

Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"

Année 2025 - 2026

Durée : 1h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Questions de cours – Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

1) Donner la définition de la mesure de Dirac δ_a au point $a \in E$.

2) Soit $f : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et bornée. Quelle est l'expression de l'intégrale de Lebesgue de f par rapport à la mesure de Dirac au point a ?

Exercice 1 – On note $E = \{a, e, i, o, u, y\}$ l'ensemble des 6 voyelles de l'alphabet et on note $\mathcal{P}(E)$ la tribu des parties de E.
On définit la fonction $X : (]0, 1], \mathcal{B}(]0, 1])) \to (E, \mathcal{P}(E))$ de la façon suivante : pour tout $\omega \in]0, 1]$, $X(\omega)$ est la $\lceil 6\omega \rceil$ ième voyelle de l'alphabet où $\lceil \xi \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à ξ (par exemple $X(0.65) = o$ car $\lceil 6 \times 0.65 \rceil = 4$ et que o est la 4ième voyelle).

1) La fonction X est-elle une variable aléatoire discrète ? (justifier votre réponse).

2) Quelle est la plus petite tribu de parties de $]0, 1]$ rendant X mesurable ? L'intervalle $]0, 1/2]$ appartient-il à cette tribu ? (justifier votre réponse).

Dans toute la suite on munit l'espace mesurable $(]0, 1], \mathcal{B}(]0, 1]))$ de la mesure définie pour tout $t \in]0, 1]$ par $\mu(]0, t]) = t^2$.

3) La mesure μ est-elle une mesure de probabilité ?

4) Soient $0 < s \leq t \leq 1$. Donner en fonction de s et t l'expression de $\mu(]s, t])$.

5) Quelle est la loi $\mathbb{P}_X$ de X ?

On introduit la fonction $g : (E, \mathcal{P}(E)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui à une voyelle associe sa position dans l'alphabet. On a donc $g(a) = 1$, $g(e) = 5$, $g(i) = 9$, $g(o) = 15$, $g(u) = 21$ et $g(y) = 25$.

6) Quelle est la valeur de $\mathbb{E}(g(X))$? (La réponse seule ne suffit pas, il faut détailler les étapes du calcul).

Exercice 2 – $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ une variable aléatoire discrète. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $p(k) = \mathbb{P}[X^{-1}(\{k\})] = \mathbb{P}(X = k)$.

1) Ecrire la loi $\mathbb{P}_X$ de X en fonction des mesures de Dirac $\{\delta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ et des probabilités $\{p(k),\ k \in \mathbb{N}\}$.

Pour la suite, on rappelle le résultat suivant. Soient f et g deux fonctions mesurables et positives définies sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pour la mesure

$$\nu = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k) \delta_k,$$

sur l'espace $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on a

$$\int_{\mathbb{N}} g d\nu = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k) g(k).$$

On introduit enfin la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ donnée par

$$\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_k.$$

2) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathbb{N}} p \mathbb{I}_A d\mu = \int_{\mathbb{N}} p(k) \mathbb{I}_A(k) d\mu(k).$$

3) Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{N}} h d\mu,$$

en précisant l'expression de la fonction mesurable positive h.

4) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $\phi_k : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\phi_k(\ell) = p(\ell) \mathbb{I}_{[k+1, \infty[}(\ell)$. Montrer que

$$S(k) := \mathbb{P}(X > k) = \int_{\mathbb{N}} \phi_k d\mu.$$

5) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{N}} \mathbb{I}_{[0,k]} d\mu = k + 1.$$

6) En utilisant les résultats des questions 3) à 5) et le théorème de Fubini, montrer que

$$\int_{\mathbb{N}} S d\mu = \mathbb{E}(X).$$

7) Déduire des questions précédentes le résultat suivant : pour toute variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k).$$