Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"
Année 2025 - 2026

Correction

Exercice 1 – On note $E = \{a, e, i, o, u, y\}$ l'ensemble des 6 voyelles de l'alphabet et on note $\mathcal{P}(E)$ la tribu des parties de E.
On définit la fonction $X : (]0,1], \mathcal{B}(]0,1])) \to (E, \mathcal{P}(E))$ de la façon suivante : pour tout $\omega \in]0,1]$, $X(\omega)$ est la $\lceil 6\omega \rceil$ ième voyelle de l'alphabet où $\lceil \xi \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à ξ (par exemple $X(0.65) = o$ car $\lceil 6 \times 0.65 \rceil = 4$ et que o est la 4ième voyelle).

1) La fonction X est-elle une variable aléatoire discrète ? (justifier votre réponse).
Pour montrer que X est une variable aléatoire discrète, il faut d'abord s'assurer que c'est une variable aléatoire, autrement dit, une fonction mesurable. Pour ce faire, il suffit de vérifier que la pré-image de tous les singletons est un élément de $\mathcal{B}(]0,1])$. On a

$$X^{-1}(\{a\}) =]0, 1/6] \in \mathcal{B}([0,1]),\ X^{-1}(\{e\}) =]1/6, 1/3] \in \mathcal{B}([0,1]),$$
$$X^{-1}(\{i\}) =]1/3, 1/2] \in \mathcal{B}([0,1]),\ X^{-1}(\{o\}) =]1/2, 2/3] \in \mathcal{B}([0,1]),$$
$$X^{-1}(\{u\}) =]2/3, 5/6] \in \mathcal{B}([0,1]) \text{ et } X^{-1}(\{y\}) =]5/6, 1] \in \mathcal{B}([0,1]).$$

Ainsi, X est bien une variable aléatoire. De plus, elle prend ses valeurs dans un ensemble au plus dénombrable (ici de cardinal 6) donc elle est discrète.

2) Quelle est la plus petite tribu de parties de $]0,1]$ rendant X mesurable ? L'intervalle $]0, 1/2]$ appartient-il à cette tribu ? (justifier votre réponse).
C'est la tribu engendrée par les 6 intervalles de la question précédente. L'intervalle $]0, 1/2]$ appartient à cette tribu comme l'union des 3 intervalles $]0, 1/6]$, $]1/6, 1/3]$ et $]1/3, 1/2]$.

Dans toute la suite on munit l'espace mesurable $(]0,1], \mathcal{B}(]0,1]))$ de la mesure définie pour tout $t \in]0,1]$ par $\mu(]0,t]) = t^2$.

3) La mesure μ est-elle une mesure de probabilité ?
Oui car $\mu(]0,1]) = 1^2 = 1$.

4) Soient $0 \leq s \leq t \leq 1$. Donner en fonction de s et t l'expression de $\mu(]s,t])$.
On a $]s,t] \cup]0,s] =]0,t]$. Ainsi, en utilisant la propriété de σ-additivité de la mesure, on en déduit que $\mu(]s,t]) + \mu([0,s]) = \mu(]0,t])$. La mesure μ étant bornée, on en déduit que $\mu(]s,t]) = \mu(]0,t]) - \mu([0,s]) = t^2 - s^2$.

5) Quelle est la loi $\mathbb{P}_X$ de X ?
La loi de X est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X(\{a\}) &= \mathbb{P}(X^{-1}(\{a\})) = \mathbb{P}([0,1/6]) = \frac{1}{36},\\
\mathbb{P}_X(\{e\}) &= \mathbb{P}(X^{-1}(\{e\})) = \mathbb{P}(]1/6,1/3]) = \frac{1}{9} - \frac{1}{36} = \frac{1}{12},\\
\mathbb{P}_X(\{i\}) &= \mathbb{P}(X^{-1}(\{i\})) = \mathbb{P}(]1/3,1/2]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36},\\
\mathbb{P}_X(\{o\}) &= \mathbb{P}(X^{-1}(\{o\})) = \mathbb{P}(]1/2,2/3]) = \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{7}{36},\\
\mathbb{P}_X(\{u\}) &= \mathbb{P}(X^{-1}(\{u\})) = \mathbb{P}(]1/2,2/3]) = \frac{25}{36} - \frac{4}{9} = \frac{1}{4},\\
\mathbb{P}_X(\{y\}) &= \mathbb{P}(X^{-1}(\{y\})) = \mathbb{P}(]5/6,1]) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{36}\delta_a + \frac{1}{12}\delta_e + \frac{5}{36}\delta_i + \frac{7}{36}\delta_o + \frac{1}{4}\delta_u + \frac{11}{36}\delta_y.$$

On introduit la fonction $g : (E, \mathcal{P}(E)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui à une voyelle associe sa position dans l'alphabet. On a donc $g(a) = 1$, $g(e) = 5$, $g(i) = 9$, $g(o) = 15$, $g(u) = 21$ et $g(y) = 25$.

6) Quelle est la valeur de $\mathbb{E}(g(X))$? (La réponse seule ne suffit pas, il faut détailler les étapes du calcul).
La fonction $g(X) = g \circ X$ étant mesurable et positive, l'espérance de $g(X)$ est bien définie. En utilisant le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{[0,1]} g(X) d\mu = \int_E g d\mathbb{P}_X.$$

En utilisant l'expression de $\mathbb{P}_X$ trouvée à la question 5), il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)) &= \frac{1}{36}g(a) + \frac{1}{12}g(e) + \frac{5}{36}g(i) + \frac{7}{36}g(o) + \frac{1}{4}g(u) + \frac{11}{36}g(y)\\
&= \frac{1}{36} + \frac{5}{12} + \frac{45}{36} + \frac{105}{36} + \frac{21}{4} + \frac{275}{36} = \frac{630}{36} = 17.5
\end{aligned}$$

Exercice 2 – $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ une variable aléatoire discrète. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $p(k) = \mathbb{P}[X^{-1}(\{k\})] = \mathbb{P}(X = k)$.

1) Ecrire la loi $\mathbb{P}_X$ de X en fonction des mesures de Dirac $\{\delta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ et des probabilités $\{p(k),\ k \in \mathbb{N}\}$.
D'après le cours, la loi d'une variable aléatoire discrète est

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_X(\{k\})\delta_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} p(k)\delta_k.$$

Pour la suite, on rappelle le résultat suivant. Soient f et g deux fonctions mesurables et positives définies sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pour la mesure

$$\nu = \sum_{k\in\mathbb{N}} f(k) d\delta_k,$$

sur l'espace $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on a

$$\int_{\mathbb{N}} g d\nu = \sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)g(k).$$

On introduit enfin la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ donnée par

$$\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k.$$

2) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathbb{N}} p\mathbb{I}_A d\mu = \int_{\mathbb{N}} p(k)\mathbb{I}_A(k) d\mu(k).$$

D'après la question 1), on a

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p(k)\delta_k(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p(k)\mathbb{I}_A(k).$$

De plus, en utilisant le rappel,

$$\int_{\mathbb{N}} p\mathbb{I}_A d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} p(k)\mathbb{I}_A(k),$$

qui est le résultat attendu.

3) Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{N}} h d\mu,$$

en précisant l'expression de la fonction mesurable positive h.
En utilisant le théorème de transfert ainsi que le rappel, on a,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{N}} x d\mathbb{P}_X(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} kp(k).$$

En posant $h(k) = kp(k)$ est en utilisant encore une fois le rappel,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} kp(k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} h(k) = \int_{\mathbb{N}} h d\mu,$$

qui est le résultat attendu.

4) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $\phi_k : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\phi_k(\ell) = p(\ell)\mathbb{I}_{[k+1,\infty[}(\ell)$. Montrer que

$$S(k) := \mathbb{P}(X > k) = \int_{\mathbb{N}} \phi_k d\mu.$$

On a

$$S(k) := \mathbb{P}(X > k) = \sum_{\ell \geq k+1} p(\ell) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} p(\ell)\mathbb{I}_{[k+1,\infty[}(\ell) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \phi_k(\ell)$$

On en déduit le résultat en utilisant le rappel comme dans les questions précédentes.

5) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{N}} \mathbb{I}_{[0,k]} d\mu = k + 1.$$

Il suffit d'utiliser encore une fois le rappel.

$$\int_{\mathbb{N}} \mathbb{I}_{[0,k]} d\mu = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbb{I}_{[0,k]}(\ell).$$

Il y a $k+1$ indicatrices non nulles (et donc égales à 1) ce qui donne le résultat.

6) En utilisant les résultats des questions 3) à 5) et le théorème de Fubini, montrer que

$$\int_{\mathbb{N}} S d\mu = \mathbb{E}(X).$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} S d\mu &= \int_{\mathbb{N}} S(k) d\mu(k) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \phi_k(\ell) d\mu(\ell) d\mu(k) \\
&= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} p(\ell)\mathbb{I}_{[k+1,\infty[}(\ell) d\mu(\ell) d\mu(k).
\end{aligned}$$

La fonction étant positive, on peut utiliser le théorème de Fubini. Il vient,

$$\int_{\mathbb{N}} S d\mu = \int_{\mathbb{N}} p(\ell) \int_{\mathbb{N}} \mathbb{I}_{[k+1,\infty[}(\ell) d\mu(k) d\mu(\ell) = \int_{\mathbb{N}} p(\ell) \int_{\mathbb{N}} \mathbb{I}_{[0,\ell-1]}(k) d\mu(k) d\mu(\ell).$$

D'après la question 5),

$$\int_{\mathbb{N}} \mathbb{I}_{[0,\ell-1]}(k) d\mu(k) = \int_{\mathbb{N}} \mathbb{I}_{[0,\ell-1]} d\mu = \ell,$$

et ainsi, d'après la question 3),

$$\int_{\mathbb{N}} S d\mu = \int_{\mathbb{N}} \ell p(\ell) d\mu(\ell) = \int_{\mathbb{N}} h(\ell) d\mu(\ell) = \mathbb{E}(X).$$

7) Déduire des questions précédentes le résultat suivant : pour toute variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k).$$

C'est une conséquence directe de la question précédente car, d'après le rappel,

$$\int_{\mathbb{N}} S d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} S(k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k).$$