Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours “Mathématiques Appliquées” et “Actuariat”
Semestre 6 – Année 2024 - 2025

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Questions de cours –

1) Enoncer clairement le corollaire du lemme de Borel-Cantelli.

2) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Rappeler les définitions des quatre types de convergences de la suite (X_n) vers une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vues en cours (en loi, presque-sûre, en probabilité et dans L^p). Vous préciserez également les liens qui relient ces convergences.

Exercice 1 – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y_n := \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Quelle est la loi de la variable aléatoire nY_n ?

2) Montrer de deux façons différentes que $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

3) En utilisant le corollaire du lemme de Borel-Cantelli, montrer que $Y_n \xrightarrow{p.s.} 0$.

4) La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge t'elle vers 0 dans L^1 ?

5) On pose pour tout $n \geq 1$, $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que

$$Z_n - \frac{\ln(n)}{\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z,$$

en précisant la loi de la variable aléatoire Z.

Exercice 2 – On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$

$$\Delta := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 - x^2\right\}.$$

1) Représenter l'ensemble Δ et calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}_\Delta(x, y)dxdy.$$

On considère le vecteur aléatoire (X, Y) de loi absolument continue de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = cy\mathbb{I}_\Delta(x, y).$$

2) Quelle est la valeur de c ? Pour vous aider éventuellement dans le calcul, vous pourrez montrer dans un premier temps que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^{1} x^k dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 2/(k+1) & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

3) Quelle est la densité de X ? Quelle est la valeur de son espérance ?

4) Donner l'expression de $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

Exercice 3 – Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \exp(-t^\theta) & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

où $\theta > 0$. On rappelle également que la fonction $\Gamma(\cdot)$ est définie pour tout $z > 0$ par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt.$$

1) Donner, en fonction de $\Gamma(\cdot)$ l'expression de l'espérance et de la variance de X.
2) Montrer que la suite de variables aléatoires $(X/v_n)_{n\geq 1}$, où $v_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, converge en probabilité vers 0.
3) Montrer que si $v_n = n$ alors $X/v_n \xrightarrow{p.s.} 0$. On admettra que pour tout $a > 0$ et $b > 0$,

$$\sum_{n\geq 1} \exp(-an^b) < \infty.$$

4) Que peut-on dire sur la convergence presque-sûre lorsque $\theta < 1$ et $v_n = \ln(n+2)$?