Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques

Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"

Année 2025 - 2026

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Questions de cours – Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire intégrable.

1) Enoncer le lemme de Borel-Cantelli.
2) Donner la définition de la convergence en loi.
3) Donner les liens d'implication entre les quatre types de convergence vus en cours (en probabilité, presque-sûrement, en loi et dans L^p).

Exercice 1 – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1) **Calculer** l'espérance et la variance de S_n.
2) **Sans utiliser la loi des grands nombres**, étudier la convergence en probabilité de S_n/n.
3) Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, donner l'expression de $\mathbb{P}(Z_n > \varepsilon)$.
4) Utiliser la réponse à la question précédente pour montrer que $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
5) Que peut-on dire quant à la convergence presque-sûre de Z_n ?

Exercice 2 – Pour tout $n \geq 1$, on considère le vecteur aléatoire (X_n, Y_n) de loi continue avec pour densité la fonction

$$f_{(X_n,Y_n)}(x, y) = c_n \mathbb{I}_{\Delta_n}(x, y),$$

avec $\Delta_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1/n \text{ et } 0 < y < 1/n - x\}$.

1) Donner l'expression de c_n.
2) Donner l'expression de la densité de X_n.
3) En déduire que la densité de la loi de la variable aléatoire $Z_n := 1 - nX_n$ est la fonction $z \mapsto 2z\mathbb{I}_{[0,1]}(z)$.
4) Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donner l'expression de $\mathbb{E}(Z_n^k)$.
5) Donner les expressions de l'espérance et de la variance de X_n. Vous pourrez vous appuyer sur les questions 3) et 4).

6) Que peut-on en conclure sur la convergence en probabilité de X_n ?

7) Donner la fonction mesurable h pour laquelle $\mathbb{E}(Y_n \mid X_n) = h(X_n)$.

8) Que peut-on en conclure sur la convergence en probabilité de $\mathbb{E}(Y_n \mid X_n)$?

Exercice 3 – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même fonction de répartition

$$\mathbb{P}(X_n \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 1, \\ 1 - z^{-1/n} & \text{si } z \geq 1. \end{cases}$$

1) Soit $\varepsilon > 0$. La série

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon),$$

est-elle convergente ?

On rappelle la seconde partie du lemme de Borel-Cantelli. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements indépendants et si la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$.

2) Déduire de la question précédente que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(\overline{\lim}\{|X_n - 1| > \varepsilon\}) = 1.$$

3) On note $\mathbb{Q}_+^\star$ l'ensemble des rationnels strictement positifs. Montrer que

$$\mathbb{P}(\{X_n \to 1\}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^\star} \overline{\lim}\{|X_n - 1| > \varepsilon\}\right).$$

4) En déduire que $\mathbb{P}(\{X_n \to 1\}) = 0$.