Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques

Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"

Année 2025 - 2026

Correction

Exercice 1 – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Calculer l'espérance et la variance de S_n.

Commençons par l'espérance. On a

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n\mathbb{E}(X_1).$$

Or,

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.$$

Donc, $\mathbb{E}(S_n) = n\lambda$. Concernant la variance, en utilisant l'indépendance des X_i,

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = n\,\mathrm{Var}(X_1).$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1^2) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k\geq 1}(k(k-1)+k)\frac{\lambda^{k-1}}{k!} \\ &= \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k\geq 2}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2+\lambda.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Var}(X_1) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$ et donc $\mathrm{Var}(S_n) = n\lambda$.

2) Sans utiliser la loi des grands nombres, étudier la convergence en probabilité de S_n/n.

D'après la question précédente, on a $\mathbb{E}(S_n/n) = \lambda$ et $\mathrm{Var}(S_n) = n\lambda/n^2 = \lambda/n \to 0$. Ainsi, d'après un résultat démontré en TD, on a que $S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda$.

3) Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, donner l'expression de $\mathbb{P}(Z_n > \varepsilon)$.
On sait que Z_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. En utilisant l'indépendance et le fait que les variables aléatoires sont identiquement distribuées,

$$\mathbb{P}(Z_n > \varepsilon) = \{\mathbb{P}(X_1 > \varepsilon)\}^n = \{1 - \mathbb{P}(X_1 \leq \varepsilon)\}^n .$$

Or, pour $\varepsilon < 1$, $\mathbb{P}(X_1 \leq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$. Donc,

$$\mathbb{P}(Z_n > \varepsilon) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)^n .$$

4) Utiliser la réponse à la question précédente pour montrer que $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
Si $\varepsilon \in]0,1[$ alors

$$\mathbb{P}(Z_n > \varepsilon) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)^n \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$ puisque $0 < 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} < 1$. Si $\varepsilon \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Z_n > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(Z_n > 0.5) \to 0,$$

ce qui montre la convergence en probabilité de Z_n vers 0.

5) Que peut-on dire quant à la convergence presque-sûre de Z_n ?
Pour $\varepsilon \in]0,1[$,

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Z_n > \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)^n = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\mathrm{e}^{-\lambda}} < \infty.$$

De plus, si $\varepsilon \geq 1$,

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Z_n > \varepsilon) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Z_n > 1/2) < \infty.$$

Ainsi, d'après le corollaire du Lemme de Borel-Cantelli, Z_n converge presque-sûrement vers 0.

Exercice 2 – Pour tout $n \geq 1$, on considère le vecteur aléatoire (X_n, Y_n) de loi continue avec pour densité la fonction

$$f_{(X_n,Y_n)}(x,y) = c_n \mathbb{I}_{\Delta_n}(x,y),$$

avec $\Delta_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1/n \text{ et } 0 < y < 1/n - x\}$.

1) Donner l'expression de c_n.
Pour avoir une densité, il faut que $c_n > 0$ et que

$$c_n = \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}_{\Delta_n}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right\}^{-1} .$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}_{\Delta_n}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{1/n} \int_0^{1/n-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n^2}.$$

Donc $c_n = 2n^2$.

2) Donner l'expression de la densité de X_n.
D'après le cours

$$f_{X_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X_n,Y_n)}(x,y)\,\mathrm{d}y = c_n \mathbb{I}_{[0,1/n]}(x) \int_0^{1/n-x} \mathrm{d}y = c_n\left(\frac{1}{n} - x\right)\mathbb{I}_{[0,1/n]}(x).$$

3) En déduire que la densité de la loi de la variable aléatoire $Z_n := 1 - nX_n$ est la fonction $z \mapsto 2z\mathbb{I}_{[0,1]}(z)$.
Si on note F_{X_n} la fonction de répartition de X_n, on a

$$\mathbb{P}(Z_n \leq t) = \mathbb{P}\left(X_n \geq \frac{1-t}{n}\right) = 1 - F_{X_n}\left(\frac{1-t}{n}\right).$$

Ainsi, la densité de Z_n est

$$f_{Z_n}(z) = \frac{1}{n} f_{X_n}\left(\frac{1-z}{n}\right) = \frac{c_n}{n^2} z\mathbb{I}_{[0,1]}(z) = 2z\mathbb{I}_{[0,1]}(z).$$

4) Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donner l'expression de $\mathbb{E}(Z_n^k)$.
Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$\mathbb{E}(Z_n^k) = 2\int_0^1 z^{k+1}\,\mathrm{d}z = \frac{2}{k+2}.$$

5) Donner les expressions de l'espérance et de la variance de X_n. Vous pourrez vous appuyer sur les questions 3) et 4).
Pour l'espérance, on a $\mathbb{E}(Z_n) = 1 - n\mathbb{E}(X_n) = 2/3$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = 1/(3n)$.
Pour la variance, on a

$$\mathrm{Var}(Z_n) = \frac{2}{4} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} = n^2\,\mathrm{Var}(X_n).$$

Donc, $\mathrm{Var}(X_n) = 1/(18n^2)$.

6) Que peut-on en conclure sur la convergence en probabilité de X_n ?
Puisque $\mathbb{E}(X_n) \to 0$ et $\mathrm{Var}(X_n) \to 0$, on a que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

7) Donner la fonction mesurable h pour laquelle $\mathbb{E}(Y_n \mid X_n) = h(X_n)$.
On calcule tout d'abord la densité conditionnelle de Y_n sachant $X_n = x$ pour tout $x \in [0, 1/n]$.

$$f_{Y_n|X_n=x}(y) = \frac{c_n\mathbb{I}_{[0,1/n-x]}(y)}{c_n(1/n - x)} = \frac{1}{1/n - x}\mathbb{I}_{[0,1/n-x]}(y).$$

C'est la densité d'une loi uniforme sur $[0, 1/n - x]$. Ainsi, $h(x)$ est l'espérance de cette loi uniforme, c'est-à-dire

$$h(x) = \frac{1/n - x}{2}.$$

8) Que peut-on en conclure sur la convergence en probabilité de $\mathbb{E}(Y_n \mid X_n)$?
Puisque

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y_n \mid X_n)\right) = \frac{1/n - \mathbb{E}(X_n)}{2} = \frac{1}{3n} \to 0,$$

et

$$\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}(Y_n \mid X_n)\right) = \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{2} = \frac{1}{72n^2} \to 0,$$

on a $\mathbb{E}(Y_n \mid X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Exercice 3 – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même fonction de répartition

$$\mathbb{P}(X_n \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 1, \\ 1 - z^{-1/n} & \text{si } z \geq 1. \end{cases}$$

1) Soit $\varepsilon > 0$. La série

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon),$$

est-elle convergente ?
Comme X_n ne prend que des valeurs supérieures à 1, on a pour tout $\varepsilon \in]0,1]$,

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > 1 + \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} \exp\left(-\frac{\ln(1+\varepsilon)}{n}\right).$$

Comme le terme général de cette série converge vers 1, la série est divergente.

On rappelle la seconde partie du lemme de Borel-Cantelli. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements indépendants et si la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$.

2) Déduire de la question précédente que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(\overline{\lim}\{|X_n - 1| > \varepsilon\}) = 1.$$

Il suffit d'appliquer la seconde partie du lemme de Borel-Cantelli.

3) On note $\mathbb{Q}_+^\star$ l'ensemble des rationnels strictement positifs. Montrer que

$$\mathbb{P}(\{X_n \to 1\}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\star} \overline{\lim}\{|X_n - 1| > \varepsilon\}\right).$$

On rappelle que

$$\mathbb{P}(\{X_n \to 1\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\star} \underline{\lim}\{|X_n - 1| \leq \varepsilon\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\star} \left(\overline{\lim}\{|X_n - 1| > \varepsilon\}\right)^{\mathrm{C}}\right).$$

L'intersection des complémentaires étant égale au complémentaire de l'union, on a

$$\mathbb{P}(\{X_n \to 1\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\star} \underline{\lim}\{|X_n - 1| \leq \varepsilon\}\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\star} \overline{\lim}\{|X_n - 1| > \varepsilon\}\right)^{\mathrm{C}}\right),$$

qui est le résultat attendu.

4) En déduire que $\mathbb{P}(\{X_n \to 1\}) = 0$.
Il suffit de remarquer que, par exemple,

$$1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\star} \overline{\lim}\{|X_n - 1| > \varepsilon\}\right) \leq 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\lim}\{|X_n - 1| > 1\}\right) = 0.$$