Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2021 - 2022

Durée : 1h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$ avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = F(t)$ où

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \exp(-x) & \text{si } x \in [0, \ln(3/2)[, \\ 1/2 & \text{si } x \in [\ln(3/2), \ln(3)[, \\ 1 - \exp(-x) & \text{si } x \geq \ln(3). \end{cases}$$

1) Tracer la fonction F et vérifier qu'il s'agit d'une fonction de répartition.

2) Montrer que
$$\mathbb{P}_X = \alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)},$$
où $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi à densité. Vous donnerez, en justifiant votre réponse, la valeur de α, l'expression de $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et la densité f de $\mathbb{P}_X^{(2)}$.

3) Calculer l'espérance de X. Vous pourrez utiliser le résultat suivant : pour tout $a > 0$,
$$\int_0^a x \exp(-x) dx = 1 - \exp(-a)(1 + a).$$

Exercice 2 – Sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère la mesure μ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mu(A) = \frac{1}{12}\delta_{1/3}(A) + \frac{1}{24}\ \delta_{2/3}(A) + \int_A \frac{7}{72x^4} \mathbb{I}_{[1/3,\infty[}(x) dx$$

1) Donner la valeur de α pour laquelle
$$\mu = \alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)},$$
où $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi à densité.

2) Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = \mu$. Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

3) Calculer l'espérance de X.

Exercice 3 – Soit $X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction continue.

1) La fonction X est-elle une variable aléatoire ? (justifier votre réponse).

On suppose que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $X(\omega) = |\omega|$ et on munit l'espace de départ de la probabilité $\mathbb{P}$ définie pour tout $-\infty < a \leq b < \infty$ par

$$\mathbb{P}([a, b]) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan(b) - \arctan(a) \right],$$

où arctan est la réciproque de la fonction tangente définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

2) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

3) Montrer que la loi de X est à densité en précisant l'expression de la fonction densité. On rappelle que la dérivée de la fonction tangente au point x est $1/(1 + x^2)$.