Contrôle continu #2 de Probabilités

Correction

Exercice 1 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$ avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = F(t)$ où

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \exp(-x) & \text{si } x \in [0, \ln(3/2)[, \\ 1/2 & \text{si } x \in [\ln(3/2), \ln(3)[, \\ 1 - \exp(-x) & \text{si } x \geq \ln(3). \end{cases}$$

1) Tracer la fonction F et vérifier qu'il s'agit d'une fonction de répartition.

2) Montrer que
$$\mathbb{P}_X = \alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)},$$
où $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi à densité. Vous donnerez, en justifiant votre réponse, la valeur de α, l'expression de $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et la densité f de $\mathbb{P}_X^{(2)}$.
Réponse – Il y a deux points de discontinuité : en $\ln(3/2)$ *et en* $\ln(3)$*. Les hauteurs des sauts sont identiques et égales à* $1/6$*. Donc* $\alpha = 2/6 = 1/3$*. La loi discrète est*
$$\mathbb{P}_X^{(1)} = \frac{1}{2}\delta_{\ln(3/2)} + \frac{1}{2}\delta_{\ln(3)}.$$
Enfin, la densité f *est donnée par*
$$f(x) = \frac{1}{1-\alpha}F'(x) = \frac{3}{2}\exp(-x)\left(\mathbb{I}_{[0,\ln(3/2)[}(x) + \mathbb{I}_{[\ln(3),\infty[}(x)\right).$$

3) Calculer l'espérance de X. Vous pourrez utiliser le résultat suivant : pour tout $a > 0$,
$$\int_0^a x\exp(-x)dx = 1 - \exp(-a)(1+a).$$
Réponse – On a
$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X(x) = \alpha \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X^{(1)}(x) + (1-\alpha)\int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X^{(2)}(x).$$
Or
$$\int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(\ln(3/2) + \ln(3)) = \frac{1}{2}\ln(9/2).$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X^{(2)}(x) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx = \frac{3}{2}\left(\int_0^{\ln(3/2)} x\exp(-x)dx + \int_{\ln(3)}^{\infty} x\exp(-x)dx\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2}{3}(1+\ln(3/2)) + \frac{1}{3}(1+\ln(3))\right) = 1 - \ln(3/2) + \ln(3)/2.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}\ln(9/2) + \frac{2}{3}\,(1 - \ln(3/2) + \ln(3)/2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln(2).$$

Une autre méthode pour calculer l'espérance est d'utiliser la formule

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(t)dt.$$

Exercice 2 – Sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère la mesure μ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mu(A) = \frac{1}{12}\delta_{1/3}(A) + \frac{1}{24}\,\delta_{2/3}(A) + \int_A \frac{7}{72x^4}\mathbb{I}_{[1/3,\infty[}(x)dx$$

1) Donner la valeur de α pour laquelle

$$\mu = \alpha\mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)},$$

où $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi à densité.
Réponse – La loi discrète $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est de la forme

$$\mathbb{P}_X^{(1)} = p\delta_{1/3} + (1-p)\delta_{2/3}.$$

On a donc

$$\mu(\{1/3, 2/3\}) = \alpha = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

On en déduit que $p = 2/3$ et que la densité de $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est

$$f(x) = \frac{1}{9x^4}\mathbb{I}_{[1/3,\infty[}(x).$$

2) Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = \mu$. Donner l'expression de la fonction de répartition de X.
Réponse – Calculons $F(t) = \mu(]-\infty, t])$. Si $t < 1/3$, $F(t) = 0$. Si $t \in [1/3, 2/3[$,

$$F(t) = \frac{1}{12} + \frac{7}{72}\int_{1/3}^{t} x^{-4}dx = \frac{1}{12} + \frac{7}{72}\left(9 - \frac{1}{3t^3}\right).$$

Enfin, si $t \geq 2/3$,

$$F(t) = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{7}{72}\left(\frac{1}{81} - \frac{1}{3t^3}\right) = \frac{1}{8} + \frac{7}{72}\left(9 - \frac{1}{3t^3}\right)$$

3) Calculer l'espérance de X.
Réponse $-$ *On a*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X d\mathbb{P} &= \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X(x) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{24} \times \frac{2}{3} + \frac{7}{72} \int_{1/3}^\infty x^{-3} dx \\ &= \frac{1}{18} + \frac{7}{16} = \frac{142}{288} = \frac{71}{144}.\end{aligned}$$

Exercice 3 $-$ Soit $X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction continue.

1) La fonction X est-elle une variable aléatoire ? (justifier votre réponse).
Réponse $-$ *Oui car une fonction continue est mesurable.*

On suppose que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $X(\omega) = |\omega|$ et on munit l'espace de départ de la probabilité $\mathbb{P}$ définie pour tout $-\infty < a \leq b < \infty$ par

$$\mathbb{P}([a, b]) = \frac{1}{\pi} \left[\, \arctan(b) - \arctan(a)\right],$$

où arctan est la réciproque de la fonction tangente définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

2) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.
Réponse $-$ *On a*

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, t])) = \mathbb{P}(\{\omega \in \mathbb{R} \mid |\omega| \leq t\}).$$

Donc si $t < 0$, $\mathbb{P}(X \leq t) = 0$ *et si* $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}([-t, t]) = \frac{1}{\pi}[\arctan(t) - \arctan(-t)] = \frac{2}{\pi} \arctan(t).$$

3) Montrer que la loi de X est à densité en précisant l'expression de la fonction densité. On rappelle que la dérivée de la fonction tangente au point x est $1/(1 + x^2)$.
Réponse $-$ *La fonction de répartition est continue et dérivable de dérivée*

$$f(t) = \frac{2}{\pi(1 + t^2)} \mathbb{I}_{[0,\infty[}(t).$$