Contrôle continu #2 de Probabilités 3

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie
Année 2022 - 2023

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$ définie pour $\lambda > 0$ par

$$\mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1 - t^{-3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

1) Proposer une fonction $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ telle que

$$\mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$

2) Pour tout $i \in \{1, 2\}$ calculer la valeur de $\mathbb{E}(X^i)$.

3) La variable aléatoire X admet-elle un moment d'ordre 3 ?

On considère à présent une variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ indépendante de X et de loi $\mathbb{P}_Y$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$\mathbb{P}_Y(\{k\}) = \frac{2^k}{\mathrm{e}^2 k!}.$$

4) Calculer l'espérance de Y. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathrm{e}^x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{x^i}{i!}.$$

5) On pose $Z = \min(2, Y)$. Donner la loi de Z et calculer son espérance.

6) Montrer que $X^Z = \mathbb{I}_{\{0\}}(Y) + X\mathbb{I}_{\{1\}}(Y) + X^2\mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(Y)$. Utiliser cette égalité pour calculer $\mathbb{E}(X^Z)$.

Exercice 2 – Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(E_1, \mathcal{P}(E_1))$ et $(E_2, \mathcal{P}(E_2))$ respectivement. On suppose que la loi de X_1 est définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$\mu_1(\{k\}) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}.$$

La loi de X_2 quant à elle est donnée pour $k \in \{0, \cdots, 3\}$ par

$$\mu_2(\{k\}) = \frac{3}{4k!(3-k)!}$$

Pour $\alpha \in]0,1[$, on considère une variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{P}(E))$ de loi $\mathbb{P}_Y = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$.

1) Quel est l'ensemble E des valeurs prises par la variable aléatoire Y ?

2) Vérifier que
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_1(\{k\}) = \sum_{k=0}^{3} \mu_2(\{k\}) = 1.$$

3) Quel est le nom de la loi de X_1 ? Même question pour X_2.

4) Pour tout $k \in E$, donner l'expression en fonction de α de $\mathbb{P}_Y(\{k\})$.

5) Donner, en fonction de α, les expressions des probabilités suivantes : $\mathbb{P}_Y(]-\infty, 0[)$, $\mathbb{P}_Y(]-\infty, 0])$ et $\mathbb{P}_Y(]1/2, \infty[)$.

6) Donner, en fonction de α, l'expression de $\mathbb{E}(Y)$.

7) Donner l'expression de $\mathrm{Var}(Y)$.

8) Vérifier que
$$\mathrm{Var}(Y) - [\alpha\mathrm{Var}(X_1) + (1-\alpha)\mathrm{Var}(X_2)] = \alpha[\mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(Y)]^2 + (1-\alpha)[\mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(Y)]^2.$$

9) En déduire que $\mathrm{Var}(Y) > \alpha\mathrm{Var}(X_1) + (1-\alpha)\mathrm{Var}(X_2)$.

On considère à présent la mesure ν_1 définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par
$$\nu_1(]-\infty, t]) = (1 - \exp(-t))\, \mathbb{I}_{]0,\infty[}(t).$$

10) Vérifier que
$$\nu_1(]-\infty, t]) = \int_{]-\infty,t]} \exp(-x)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(x)dx.$$

11) Calculer l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}} t d\nu_1(t).$$

12) Montrer que la fonction $\nu_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ donnée par $\nu_2 = \alpha^2\mu_1 + \alpha(1-\alpha)\mu_2 + (1-\alpha)\nu_1$ est une mesure de probabilité.

13) En utilisant les résultats précédents, donner l'expression de l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}} t d\nu_2(t).$$

Exercice 3 – On considère la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_X = \alpha\delta_1 + (1-\alpha)\mu$ où $\alpha \in]0,1[$, δ_1 est la mesure de Dirac au point 1 et μ est la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et pour tout $\theta > 0$ par

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \mathbb{I}_{]0,\infty[}(x) dx.$$

1) Donner l'expression de la fonction de répartition F de X.

2) Trouver, de deux façons différentes, l'expression de l'espérance de X.

3) Donner l'expression de la fonction de répartition G de X^2.

4) Trouver, de deux façons différentes, l'expression de $\mathbb{E}(X^2)$.

5) En déduire l'expression de la variance de X.