Contrôle continu #2 de Probabilités 3

Correction

Exercice 1 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$ définie pour $\lambda > 0$ par

$$\mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1 - t^{-3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

1) Proposer une fonction $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ telle que

$$\mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$

Réponse – Il suffit de prendre

$$f(x) = 3x^{-4}\mathbb{I}_{]1,\infty[}(x).$$

2) Pour tout $i \in \{1, 2\}$ calculer la valeur de $\mathbb{E}(X^i)$.
Réponse – On a, pour $i \in \{1, 2\}$

$$\mathbb{E}(X^i) = 3\int_1^{\infty} x^{i-4}dx = \frac{3}{i-3}\left[\ x^{i-3}\right]_1^{\infty} = \frac{3}{3-i}.$$

3) La variable aléatoire X admet-elle un moment d'ordre 3 ?
Réponse – Non car

$$\mathbb{E}(X^3) = 3\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = 3\left[\ \ln(x)\right]_1^{\infty} = +\infty.$$

On considère à présent une variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ indépendante de X et de loi $\mathbb{P}_Y$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$\mathbb{P}_Y(\{k\}) = \frac{2^k}{\mathrm{e}^2 k!}.$$

4) Calculer l'espérance de Y. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathrm{e}^x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{x^i}{i!}.$$

Réponse – On obtient facilement que $\mathbb{E}(Y) = 2$.

5) On pose $Z = \min(2, Y)$. Donner la loi de Z et calculer son espérance.
Réponse – La variable aléatoire Z prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. Il suffit de calculer les probabilités $\mathbb{P}(Z = 0)$, $\mathbb{P}(Z = 1)$ et $\mathbb{P}(Z = 2)$. Or, $\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathrm{e}^{-2}$. De plus, $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 2\mathrm{e}^{-2}$. Enfin, $\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(Y \geq 2) = 1 - 3\mathrm{e}^{-2}$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \times \mathrm{e}^{-2} + 1 \times 2\mathrm{e}^{-2} + 2 \times (1 - 3\mathrm{e}^{-2}) = 2 - 4\mathrm{e}^{-2}.$$

6) Montrer que $X^Z = \mathbb{I}_{\{0\}}(Y) + X\mathbb{I}_{\{1\}}(Y) + X^2\mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(Y)$. Utiliser cette égalité pour calculer $\mathbb{E}(X^Z)$.
Réponse – Il suffit de remarquer que

$$X^Z = X^Z\left(\mathbb{I}_{\{0\}}(Y) + \mathbb{I}_{\{1\}}(Y) + \mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(Y)\right),$$

et que $X^Z = 1$ lorsque $Y = 0$, $X^Z = X$ lorsque $Y = 1$ et enfin $X^Z = X^2$ lorsque $Y \geq 2$. On en déduit ensuite facilement l'espérance en utilisant la linéarité de l'espérance et le fait que X et Y sont indépendantes. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^Z) &= \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{E}(X)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(Y\geq 2)\\ &= \mathrm{e}^{-2} + \frac{3}{2}\times 2\mathrm{e}^{-2} + 3[1-3\mathrm{e}^{-2}] = 3 - 5\mathrm{e}^{-2}.\end{aligned}$$

Exercice 2 – Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(E_1, \mathcal{P}(E_1))$ et $(E_2, \mathcal{P}(E_2))$ respectivement. On suppose que la loi de X_1 est définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$\mu_1(\{k\}) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}.$$

La loi de X_2 quant à elle est donnée pour $k \in \{0, \cdots, 3\}$ par

$$\mu_2(\{k\}) = \frac{3}{4k!(3-k)!}$$

Pour $\alpha \in]0,1[$, on considère une variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{P}(E))$ de loi $\mathbb{P}_Y = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$.

1) Quel est l'ensemble E des valeurs prises par la variable aléatoire Y ?
Réponse – On a évidemment $E = \mathbb{N}$.

2) Vérifier que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_1(\{k\}) = \sum_{k=0}^{3} \mu_2(\{k\}) = 1.$$

Réponse – Pour μ_1 il suffit d'utiliser le développement en série entière de l'exponentielle. Pour μ_2, on peut le vérifier à la main ou bien utiliser la formule du binôme de Newton en remarquant que $1 = (1/2 + 1/2)^3$.

3) Quel est le nom de la loi de X_1 ? Même question pour X_2.
Réponse – Il fallait reconnaître que μ_1 est la loi de Poisson de paramètre 1 et μ_3 la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 1/2$.

4) Pour tout $k \in E$, donner l'expression en fonction de α de $\mathbb{P}_Y(\{k\})$.
Réponse – Si $k \in \{0, \cdots, 3\}$ on a

$$\mathbb{P}_Y(\{k\}) = \alpha\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!} + (1-\alpha)\frac{3}{4k!(3-k)!}.$$

Si $k \in \{4, \cdots\}$ on a

$$\mathbb{P}_Y(\{k\}) = \alpha\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}.$$

5) Donner, en fonction de α, les expressions des probabilités suivantes : $\mathbb{P}_Y(]-\infty,0[)$, $\mathbb{P}_Y(]-\infty,0])$ et $\mathbb{P}_Y(]1/2,\infty[)$.
Réponse – On a $\mathbb{P}_Y(]-\infty,0[)=0$. *De plus* $\mathbb{P}_Y(]-\infty,0])=\mathbb{P}_Y(\{0\})=\alpha e^{-1}+(1-\alpha)/8$. *Enfin,* $\mathbb{P}_Y(]1/2,\infty[)=1-\mathbb{P}_Y(]-\infty,1/2])=1-\mathbb{P}_Y(]-\infty,0])$.

6) Donner, en fonction de α, l'expression de $\mathbb{E}(Y)$.
Réponse – Le plus simple est d'utiliser le fait que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \int_\Omega Y d\mathbb{P} = \int_E y d\mathbb{P}_Y(y) = \alpha\int_E y d\mu_1(y) + (1-\alpha)\int_E y d\mu_2(y)\\ &= \alpha\mathbb{E}(X_1)+(1-\alpha)\mathbb{E}(X_2).\end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\mathbb{E}(X_1)=1$ *et* $\mathbb{E}(X_2)=3/2$. *Ainsi,*

$$\mathbb{E}(Y)=\alpha+\frac{3}{2}(1-\alpha)=\frac{1}{2}(3-\alpha).$$

7) Donner l'expression de $\mathrm{Var}(Y)$.
Réponse – Comme précédemment, on a $\mathbb{E}(Y^2)=\alpha\mathbb{E}(X_1^2)+(1-\alpha)\mathbb{E}(X_2^2)$. *Or,* $\mathbb{E}(X_1^2)=2$ *et* $\mathbb{E}(X_2^2)=3$. *Ainsi*

$$\mathbb{E}(Y^2)=2\alpha+3(1-\alpha)=3-\alpha.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Var}(Y)=\mathbb{E}(Y^2)-[\mathbb{E}(Y)]^2=3-\alpha-\frac{1}{4}(3-\alpha)^2=\frac{1}{4}(3-\alpha)(1+\alpha).$$

8) Vérifier que

$$\mathrm{Var}(Y)-[\alpha\mathrm{Var}(X_1)+(1-\alpha)\mathrm{Var}(X_2)]=\alpha[\mathbb{E}(X_1)-\mathbb{E}(Y)]^2+(1-\alpha)[\mathbb{E}(X_2)-\mathbb{E}(Y)]^2.$$

Réponse – On a

$$\alpha\mathrm{Var}(X_1)+(1-\alpha)\mathrm{Var}(X_2)=\alpha+\frac{3}{4}\ (1-\alpha).$$

Ainsi, après calcul

$$\mathrm{Var}(Y)-[\alpha\mathrm{Var}(X_1)+(1-\alpha)\mathrm{Var}(X_2)]=\frac{\alpha(1-\alpha)}{4}.$$

Il reste à vérifier que

$$\begin{aligned}&\alpha[\mathbb{E}(X_1)-\mathbb{E}(Y)]^2+(1-\alpha)[\mathbb{E}(X_2)-\mathbb{E}(Y)]^2\\ =\ &\alpha\left(1-\frac{1}{2}(3-\alpha)\right)^2+(1-\alpha)\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(3-\alpha)\right)^2=\frac{\alpha(1-\alpha)}{4}.\end{aligned}$$

9) En déduire que $\mathrm{Var}(Y)>\alpha\mathrm{Var}(X_1)+(1-\alpha)\mathrm{Var}(X_2)$.
Réponse – C'est direct.

On considère à présent la mesure ν_1 définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par

$$\nu_1(]-\infty, t]) = (1 - \exp(-t))\, \mathbb{I}_{]0,\infty[}(t).$$

10) Vérifier que

$$\nu_1(]-\infty, t]) = \int_{]-\infty,t]} \exp(-x)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(x)dx.$$

Réponse – C'est un simple calcul

11) Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} td\nu_1(t).$$

Réponse – La mesure ν_1 *étant une mesure de densité* $\exp(-x)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(x)$ *par rapport à la mesure de Lebesgue, on a d'après le cours*

$$\int_{\mathbb{R}} td\nu_1(t) = \int_{\mathbb{R}} t\exp(-t)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(t)dt = 1.$$

12) Montrer que la fonction $\nu_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ donnée par $\nu_2 = \alpha^2\mu_1 + \alpha(1-\alpha)\mu_2 + (1-\alpha)\nu_1$ est une mesure de probabilité.
Réponse – Il faut vérifier que $\nu_2(\emptyset) = 0$*, que* ν_2 *est* σ*-additive et que* $\nu_2(\mathbb{R}) = 1$.

13) En utilisant les résultats précédents, donner l'expression de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} td\nu_2(t).$$

Réponse – Il faut remarquer que

$$\int_{\mathbb{R}} td\nu_2(t) = \alpha^2\mathbb{E}(X_1) + \alpha(1-\alpha)\mathbb{E}(X_2) + (1-\alpha)\int_{\mathbb{R}} td\nu_1(t).$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} td\nu_2(t) = \alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha(1-\alpha) + (1-\alpha).$$

Exercice 3 – On considère la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_X = \alpha\delta_1 + (1-\alpha)\mu$ où $\alpha \in]0,1[$, δ_1 est la mesure de Dirac au point 1 et μ est la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et pour tout $\theta > 0$ par

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(x)dx.$$

1) Donner l'expression de la fonction de répartition F de X.
Réponse – Pour tout $t \in \mathbb{R}$*, on a*

$$F(t) = \mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \alpha\delta_1(]-\infty, t]) + (1-\alpha)\mu(]-\infty, t]).$$

Or,

$$\delta_1(]-\infty,t]) = \begin{cases} 0 & si\ t < 1 \\ 1 & si\ t \geq 1. \end{cases}$$

et

$$\mu(]-\infty,t]) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1-\exp(-t/\theta) & si\ t \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi

$$F(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ (1-\alpha)[1-\exp(-t/\theta)] & si\ t \in [0,1[, \\ \alpha + (1-\alpha)[1-\exp(-t/\theta)] & si\ t \geq 1. \end{cases}$$

2) Trouver, de deux façons différentes, l'expression de l'espérance de X.
Réponse − La première méthode est le calcul direct.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X = \alpha + (1-\alpha)\int_0^\infty \frac{x}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)dx \\ &= \alpha + (1-\alpha)\theta. \end{aligned}$$

La deuxième méthode consiste à intégrer la fonction de survie (possible car X est une variable aléatoire positive). On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty (1-F(t))dt = \int_0^1 [\alpha + (1-\alpha)\exp(-t/\theta)]dt \\ &+ (1-\alpha)\int_1^\infty \exp(-t/\theta)dt \\ &= \alpha + (1-\alpha)\int_0^\infty \exp(-t/\theta)dt = \alpha + (1-\alpha)\theta. \end{aligned}$$

3) Donner l'expression de la fonction de répartition G de X^2.
Réponse − On a évidemment $G(t) = 0$ si $t < 0$. La variable aléatoire X étant positive, on a pour tout $t \geq 0$,

$$G(t) = \mathbb{P}[X^2 \leq t] = \mathbb{P}[X \leq t^{1/2}] = F(t^{1/2}).$$

4) Trouver, de deux façons différentes, l'expression de $\mathbb{E}(X^2)$.
Réponse − La première méthode est le calcul direct.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_\Omega X^2 d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x^2 d\mathbb{P}_X = \alpha + (1-\alpha)\int_0^\infty \frac{x^2}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)dx \\ &= \alpha + 2(1-\alpha)\theta^2. \end{aligned}$$

La deuxième méthode consiste à intégrer la fonction de survie (possible *car X^2 est une variable aléatoire positive). On a*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^\infty (1-G(t))dt = \int_0^1 [\alpha + (1-\alpha)\exp(-t^{1/2}/\theta)]dt \\
&+ (1-\alpha)\int_1^\infty \exp(-t^{1/2}/\theta)dt \\
&= \alpha + (1-\alpha)\int_0^\infty \exp(-t^{1/2}/\theta)dt = \alpha + 2(1-\alpha)\theta^2.
\end{aligned}$$

5) En déduire l'expression de la variance de X.
Réponse – On a

$$\mathrm{Var}(X) = \alpha + 2(1-\alpha)\theta_n^2 - [\ \alpha + (1-\alpha)\theta]^2 .$$