Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie
Année 2023 - 2024

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 – On considère la fonction $F(\cdot)$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1/6 & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1/4 & \text{si } x \in [1,2[, \\ 1 - 3/x^2 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

1) La fonction $F(\cdot)$ est-elle une fonction de répartition ? Justifier votre réponse.

On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

2) Montrer qu'il existe une loi absolument continue $\mathbb{P}_X^{(1)}$, une loi discrète $\mathbb{P}_X^{(2)}$ et $\alpha \in]0,1[$ tels que $\mathbb{P}_X = \alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$. Vous préciserez la valeur de α, l'expression de $\mathbb{P}_X^{(2)}$ et la densité de probabilité de $\mathbb{P}_X^{(1)}$.

3) On note X_1 (resp. X_2) une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X^{(1)}$ (resp. $\mathbb{P}_X^{(2)}$). Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

4) Calculer l'espérance de X avec la méthode de votre choix.

Exercice 2 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = cx^{-4} \exp(-x^{-3}) \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x),$$

où c est une constante positive.

1) Quelle valeur de c doit-on prendre pour que $f(\cdot)$ soit une densité de probabilité (aide : vous pourrez effectuer le changement de variable $y = x^{-3}$).

On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_X$ qui est absolument continue de densité $f(\cdot)$. On rappelle que la fonction $\Gamma(\cdot)$ est donnée pour tout $a > 0$ par

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \exp(-x) dx.$$

2) Quelle intégrale faut-il calculer pour obtenir la valeur de $\mathbb{E}(X)$?

3) Donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$ en fonction de la fonction $\Gamma(\cdot)$.

On introduit la variable aléatoire $E : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi exponentielle standard. On rappelle que la densité d'une loi exponentielle est donnée par $g(x) = \exp(-x)\mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)$.

4) Quelle est la fonction de répartition de E ? Calculer l'espérance de E.

On pose $Y := \lfloor E \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$. La loi de Y est notée $\mathbb{P}_Y$ et est donnée par

$$\mathbb{P}_Y = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \delta_i.$$

5) Détailler les calculs conduisant à l'égalité $p_i = [1 - \exp(-1)] \exp(-i)$.

6) Quelle est la valeur de la somme des p_i pour $i \in \mathbb{N}$?

Pour tout $r \in]0,1[$, on admettra que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} ir^i = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

7) Donner la valeur de $\mathbb{E}(Y)$. Vous donnerez le résultat en fonction de $\exp(-1)$.

8) Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_Z = (\mathbb{P}_X + \mathbb{P}_Y)/2$. Donner l'expression de la fonction de répartition de Z.

Exercice 3 – On munit l'espace mesurable $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ de la mesure $\mu(\cdot)$ définie pour tout $0 \leq a \leq b \leq \infty$ par $\mu(]a,b[) = b^2 - a^2$. On admettra que $\mu(\cdot)$ est bien une mesure et qu'elle est entièrement déterminée par ses valeurs sur $\mathcal{C} = \{]a,b[,\ 0 \leq a \leq b < \infty\}$. On introduit la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$g = \sum_{i=1}^{3} i\mathbb{I}_{]i-1,i[}.$$

1) Montrer que g est une fonction étagée positive.

2) Calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}^+} g d\mu.$$

Pour tout $c > 0$, soit $\nu(\cdot)$ la mesure sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ par

$$\nu_c(A) = c\int_A g d\mu.$$

On admettra que $\nu_c(\cdot)$ est une mesure.

3) Quelle valeur c_0 de c faut-il prendre pour que $\nu_{c_0}(\cdot)$ soit une mesure de probabilité ? Si vous n'avez pas répondu à la question 2), vous pouvez donner le résultat en fonction de I.

4) Donner l'expression de la fonction $F : t \mapsto \nu_{c_0}(]-\infty, t])$. Vous distinguerez les cas $t < 0$, $t \in [0,1[$, $t \in [1,2[$, $t \in [2,3[$ et $t \geq 3$.