Contrôle continu #2 de “ Probabilités 3 ”

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2023 - 2024

Correction

Exercice 1 – On considère la fonction $F(\cdot)$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1/6 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1/4 & \text{si } x \in [1, 2[, \\ 1 - 3/x^2 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

1) La fonction $F(\cdot)$ est-elle une fonction de répartition ? Justifier votre réponse.
   Il suffit de faire la représentation graphique de $F(\cdot)$ et remarquer qu'elle est croissante, continue à droite, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

2) Montrer qu'il existe une loi absolument continue $\mathbb{P}_X^{(1)}$, une loi discrète $\mathbb{P}_X^{(2)}$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que $\mathbb{P}_X = \alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1 - \alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$. Vous préciserez la valeur de α, l'expression de $\mathbb{P}_X^{(2)}$ et la densité de probabilité de $\mathbb{P}_X^{(1)}$.
   La fonction $F(\cdot)$ présente un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité. La somme de la hauteur des sauts est $1 - \alpha = 1/6 + (1/4 - 1/6) = 1/4$. Il y a deux points de discontinuité (0 et 1) conduisant à la loi discrète
   $$\mathbb{P}_X^{(2)} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{6}\delta_0 + \frac{1}{12}\delta_1\right) = \frac{2}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_1.$$
   Enfin, la dérivée de $F(\cdot)$ est $F'(x) = 6x^{-3}\mathbb{I}_{[2,\infty[}(x)$. On vérifie enfin que
   $$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{6}{\alpha} x^{-3}\mathbb{I}_{[2,\infty[}(x)dx = 8\int_2^{\infty} x^{-3}dx = 1.$$
   Ainsi, $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi absolument continue de densité $f(\cdot)$.

3) On note X_1 (resp. X_2) une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X^{(1)}$ (resp. $\mathbb{P}_X^{(2)}$). Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.
   On a
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1) = \int_{\Omega} X_1 d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_{X_1}(x) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx = 8\int_2^{\infty} x \times x^{-3}dx \\ = 8\left[-\frac{1}{x}\right]_2^{\infty} = 4.\end{aligned}$$
   De plus, $\mathbb{E}(X_2) = 0 \times 2/3 + 1 \times 1/3 = 1/3$.

4) Calculer l'espérance de X avec la méthode de votre choix.
Comme $\mathbb{E}(X) = \alpha\mathbb{E}(X_1) + (1-\alpha)\mathbb{E}(X_2)$ on a directement que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3}{4} \times 4 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{37}{12}.$$

Exercice 2 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = cx^{-4} \exp(-x^{-3})\mathbb{I}_{[0,\infty[}(x),$$

où c est une constante positive.

1) Quelle valeur de c doit-on prendre pour que $f(\cdot)$ soit une densité de probabilité (aide : vous pourrez effectuer le changement de variable $y = x^{-3}$).
Comme $c > 0$, la fonction $f(\cdot)$ est positive. Il reste donc à prendre c pour avoir l'intégrabilité à 1. On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = c\int_0^\infty x^{-4} \exp(-x^{-3})dx.$$

En posant $y = x^{-3}$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = c\int_0^\infty y^{4/3} \exp(-y)\frac{1}{3}y^{-4/3}dy = \frac{c}{3}\int_0^\infty \exp(-y)dy = \frac{c}{3}.$$

Il faut donc prendre $c = 3$.

On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_X$ qui est absolument continue de densité $f(\cdot)$. On rappelle que la fonction $\Gamma(\cdot)$ est donnée pour tout $a > 0$ par

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \exp(-x)dx.$$

2) Quelle intégrale faut-il calculer pour obtenir la valeur de $\mathbb{E}(X)$?
Il faut calculer

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^\infty 3x^{-3} \exp(-x^{-3})dx.$$

3) Donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$ en fonction de la fonction $\Gamma(\cdot)$.
En posant $y = x^{-3}$,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty y \exp(-y)y^{-4/3}dy = \int_0^\infty y^{-1/3} \exp(-y)dy = \Gamma(2/3).$$

On introduit la variable aléatoire $E : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi exponentielle standard. On rappelle que la densité d'une loi exponentielle est donnée par $g(x) = \exp(-x)\mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)$.

4) Quelle est la fonction de répartition de E ? Calculer l'espérance de E.
La fonction de répartition de E est $t \mapsto 1-\exp(-t)$ pour $t > 0$. L'espérance est égale à 1.

On pose $Y := \lfloor E \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$. La loi de Y est notée $\mathbb{P}_Y$ et est donnée par

$$\mathbb{P}_Y = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i \delta_i.$$

5) Détailler les calculs conduisant à l'égalité $p_i = [1 - \exp(-1)] \exp(-i)$.
On a

$$\begin{aligned} p_i = \mathbb{P}(Y = i) = \mathbb{P}(E \in [i, i+1[) &= \int_i^{i+1} \exp(-x)dx = \exp(-i) - \exp(-i-1) \\ &= \exp(-i)[1 - \exp(-1)]. \end{aligned}$$

6) Quelle est la valeur de la somme des p_i pour $i \in \mathbb{N}$?
On doit nécessairement avoir que la somme vaut 1. On vérifie bien que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \exp(-i)[1 - \exp(-1)] = [1 - \exp(-1)]\frac{1}{1 - \exp(-1)} = 1.$$

Pour tout $r \in]0, 1[$, on admettra que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} ir^i = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

7) Donner la valeur de $\mathbb{E}(Y)$. Vous donnerez le résultat en fonction de $\exp(-1)$.
Il suffit de savoir que

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} ip_i = [1 - \exp(-1)] \sum_{i\in\mathbb{N}} i \exp(-i).$$

En appliquant la formule avec $r = \exp(-1)$ on trouve

$$\mathbb{E}(Y) = [1 - \exp(-1)]\frac{\exp(-1)}{(1 - \exp(-1))^2} = \frac{\exp(-1)}{1 - \exp(-1)}.$$

8) Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_Z = (\mathbb{P}_X + \mathbb{P}_Y)/2$. Donner l'expression de la fonction de répartition de Z.
Si on note $F_Z(\cdot)$ la fonction de répartition de Z, on a $F_Z(t) = 0$ si $t < 0$ et pour $t \geq 0$,

$$F_Z(t) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X \leq t) + \mathbb{P}(Y \leq t)\right).$$

Or, pour $t \geq 0$, $\mathbb{P}(X \leq t) = \exp(-t^{-3})$ et

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \sum_{i=0}^{\lfloor t \rfloor} p_i = 1 - \exp(-\lfloor t \rfloor) \exp(-1).$$

En conclusion, pour $t \geq 0$,

$$F_Z(t) = \frac{1}{2} \left[\exp(-t^{-3}) + 1 - \exp(-\lfloor t \rfloor) \exp(-1) \right].$$

Exercice 3 – On munit l'espace mesurable $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ de la mesure $\mu(\cdot)$ définie pour tout $0 \leq a \leq b \leq \infty$ par $\mu(]a, b[) = b^2 - a^2$. On admettra que $\mu(\cdot)$ est bien une mesure et qu'elle est entièrement déterminée par ses valeurs sur $\mathcal{C} = \{]a, b[,\ 0 \leq a \leq b < \infty\}$. On introduit la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$g = \sum_{i=1}^{3} i \mathbb{I}_{]i-1,i[}.$$

1) Montrer que g est une fonction étagée positive.
   La fonction g est une somme finie. Les coefficients $\alpha_i = i$ sont positifs. Enfin, les ensembles $A_i =]i-1, i[$ sont disjoints.

2) Calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}^+} g d\mu.$$

   Par définition de l'intégrale d'une fonction étagée positive,

$$I = \sum_{i=1}^{3} i \mu(]i-1, i[) = \sum_{i=1}^{3} i(2i-1) = 1 + 6 + 15 = 22.$$

Pour tout $c > 0$, soit $\nu(\cdot)$ la mesure sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ par

$$\nu_c(A) = c \int_A g d\mu.$$

On admettra que $\nu_c(\cdot)$ est une mesure.

3) Quelle valeur c_0 de c faut-il prendre pour que $\nu_{c_0}(\cdot)$ soit une mesure de probabilité ? Si vous n'avez pas répondu à la question 2), vous pouvez donner le résultat en fonction de I.
   Il faut bien sûr que $c_0 > 0$ et que $\nu_{c_0}(\mathbb{R}^+) = 1$. Or, $\nu_{c_0}(\mathbb{R}^+) = c_0 I$. Il faut donc prendre $c_0 = 1/I = 1/22$.

4) Donner l'expression de la fonction $F : t \mapsto \nu_{c_0}(]-\infty, t])$. Vous distinguerez les cas $t < 0$, $t \in [0, 1[$, $t \in [1, 2[$, $t \in [2, 3[$ et $t \geq 3$.

On a pour tout t

$$\nu_{c_0}(]-\infty, t]) = c_0 \int_{]-\infty,t]} g d\mu = c_0 \sum_{i=1}^{3} i\mu\left(]i-1, i[\cap]-\infty, t]\right).$$

Donc

$$\nu_{c_0}(]-\infty, t]) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ c_0 t^2 & \text{si } t \in [0, 1[, \\ c_0(1 + 2 \times (t^2 - 1)) & \text{si } t \in [1, 2[, \\ c_0(1 + 6 + 3 \times (t^2 - 4)) & \text{si } t \in [2, 3[, \\ c_0(1 + 6 + 15) = 1 & \text{si } t \geq 3. \end{cases}$$