

Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie
Année 2024 - 2025

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice préliminaire – Démontrer les égalités ci-dessous (vous aurez à les utiliser dans la suite).

i) Soit $r \in]0, 1[$, montrer que

$$\sum_{i=1}^{\infty} ir^{i-1} = \frac{1}{(1-r)^2} \text{ et } \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)r^{i-2} = \frac{2}{(1-r)^3}.$$

(On admettra que l'on peut intervertir les signes somme et dérivée.)

ii) Par récurrence et à l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\infty} t^k \exp(-t) dt = k!.$$

Exercice 1 – On effectue une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce dont la probabilité d'obtenir "face" est $p \in]0, 1[$. Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à décrire. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on introduit la variable aléatoire $T_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E_n, \mathcal{P}(E_n))$ où pour tout $\omega \in \Omega$, $T_n(\omega)$ correspond au numéro du lancer où l'on a obtenu "face" pour la n -ième fois.

- 1) Donner l'ensemble E_n des réalisations possibles de la variable aléatoire T_n .
- 2) Donner, en fonction de n et p , l'expression des probabilités suivantes : $\mathbb{P}(T_n = n)$ et $\mathbb{P}(T_n = n + 1)$.
- 3) Déterminer la loi de la variable aléatoire T_2 .
- 4) On pose $q = 1 - p$. Donner l'expression, en fonction de q , de l'espérance de T_2 .

Exercice 2 – Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi \mathbb{P}_X avec

$$\mathbb{P}_X(]-\infty, x]) =: F(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{si } x < -\ln(5), \\ 2/5 & \text{si } x \in [-\ln(5), 0[, \\ (x+6)/10 & \text{si } x \in [0, 2[, \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

- 1) Représentez graphiquement la fonction F .

- 2) Quel est le support de la loi de X ? (autrement dit, quelles sont les valeurs prises par la fonction X).
- 3) Ecrire la loi \mathbb{P}_X sous la forme $\alpha\mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$ où $\alpha \in]0, 1[$, $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi à densité. Vous donnerez la valeur de α , l'expression de $\mathbb{P}_X^{(1)}$ ainsi que la densité de la loi $\mathbb{P}_X^{(2)}$.
- 4) Calculer $\mathbb{E}(|X|)$. La variable aléatoire X est-elle intégrable ? Si oui, calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = (2\mu_1 + 5\mu_2)/7$ avec

$$\mu_1 := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \delta_k,$$

et, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_2(A) = \int_A \exp(-x) \mathbb{I}_{[0, \infty[}(x) dx.$$

- 1) Calculer $\mu_1(\mathbb{R})$ et $\mu_2(\mathbb{R})$. En déduire que l'on a bien $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$.

On note F la fonction de répartition de X .

- 2) Quelle est la valeur de $F(t)$ lorsque $t < 0$? Lorsque $t \in [0, 1[$?
- 3) Soit $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $t \in [j, j+1[$. Donner, en fonction de t et j l'expression de $F(t)$.
- 4) Calculer de deux manières différentes l'espérance $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 4 – On considère la fonction mesurable $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = c \exp(-\sqrt{x}) \mathbb{I}_{[0, \infty[}(x).$$

où $c \in \mathbb{R}$.

- 1) Donner la valeur de c pour laquelle f est une densité. Si vous ne trouvez pas cette valeur, vous pourrez continuer l'exercice en donnant vos résultats en fonction de c .

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi \mathbb{P}_X absolument continue de densité f .

- 2) Donner l'expression de la fonction de répartition de X .
- 3) Calculer de deux façons différentes l'espérance de X .