

Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie
Année 2024 - 2025

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice préliminaire – Démontrer les égalités ci-dessous (vous aurez à les utiliser dans la suite).

i) Soit $r \in]0, 1[$, montrer que

$$\sum_{i=1}^{\infty} ir^{i-1} = \frac{1}{(1-r)^2} \text{ et } \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)r^{i-2} = \frac{2}{(1-r)^3}.$$

(On admettra que l'on peut intervertir les signes somme et dérivée.)

ii) Par récurrence et à l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\infty} t^k \exp(-t) dt = k!.$$

Correction : On a

$$\sum_{i=1}^{\infty} ir^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} r^i = \frac{\partial}{\partial r} \sum_{i=1}^{\infty} r^i = \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

De plus,

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)r^{i-2} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r^i = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{r^2}{1-r} = \frac{2[(1-r)^2 + r(2-r)]}{(1-r)^3} = \frac{2}{(1-r)^3}.$$

Enfin, on remarque facilement que l'hypothèse de récurrence est vraie en $k = 0$. Supposons qu'elle soit vérifiée au rang k . On a, en faisant une intégration par partie,

$$\int_0^{\infty} t^{k+1} \exp(-t) dt = [-t^{k+1} \exp(-t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (k+1)t^k \exp(-t) dt = (k+1)k! = (k+1)!.$$

qui est le résultat attendu.

Exercice 1 – On effectue une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce dont la probabilité d'obtenir "face" est $p \in]0, 1[$. Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à décrire. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on introduit la variable aléatoire $T_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E_n, \mathcal{P}(E_n))$ où pour tout $\omega \in \Omega$, $T_n(\omega)$ correspond au numéro du lancer où l'on a obtenu "face" pour la n -ième fois.

1) Donner l'ensemble E_n des réalisations possibles de la variable aléatoire T_n .
Correction : Il faut remarquer que l'on ne peut pas avoir $T_n < n$. Ainsi, $E_n = \{n, n + 1, \dots\}$.

2) Donner, en fonction de n et p , l'expression des probabilités suivantes : $\mathbb{P}(T_n = n)$ et $\mathbb{P}(T_n = n + 1)$.

Correction : L'événement $\{T_n = n\}$ correspond à la réalisation de n "face" consécutifs. On a donc $\mathbb{P}(T_n = n) = p^n$. De plus, pour que l'événement $\{T_n = n + 1\}$ soit réalisé, il faut qu'il y ait une fois "pile" et $n - 1$ fois "face" lors des n premiers lancers et "face" au dernier. On a ainsi que

$$\mathbb{P}(T_n = n + 1) = \binom{n}{1} (1 - p)p^n = np^n(1 - p).$$

De manière générale, on peut montrer que pour $k \geq n$,

$$\mathbb{P}(T_n = k) = \binom{k - 1}{n - 1} (1 - p)^{k - n} p^n.$$

3) Déterminer la loi de la variable aléatoire T_2 .

Correction : Pour $k \geq 2$, l'événement $\{T_2 = k\}$ est réalisé dès lors qu'il y a une seule fois "face" lors des $k - 1$ premiers lancers et "face" au k -ième lancer. On trouve donc que la loi de T_2 est donnée pour $k \geq 2$ par

$$\mathbb{P}(T_2 = k) = (k - 1)p^2(1 - p)^{k - 2}.$$

4) On pose $q = 1 - p$. Donner l'expression, en fonction de q , de l'espérance de T_2 .

Correction : La variable aléatoire T_2 étant positive, l'écriture $\mathbb{E}(T_2)$ a un sens. On a

$$\mathbb{E}(T_2) = \sum_{k \geq 2} k \mathbb{P}(T_2 = k) = p^2 \sum_{k \geq 2} k(k - 1)(1 - p)^{k - 2}.$$

En posant $q = 1 - p$ et en utilisant le résultat de l'exercice préliminaire, on a donc

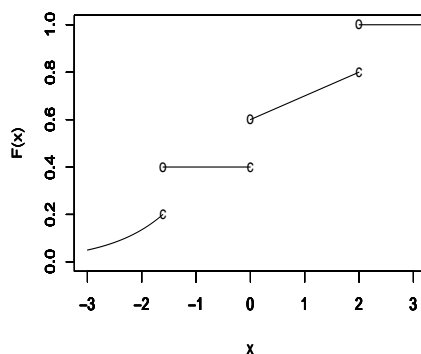
$$\mathbb{E}(T_2) = (1 - q)^2 \sum_{k \geq 2} k(k - 1)q^{k - 2} = (1 - q)^2 \frac{2}{(1 - q)^3} = \frac{2}{1 - q}.$$

Exercice 2 – Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi \mathbb{P}_X avec

$$\mathbb{P}_X([-\infty, x]) =: F(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{si } x < -\ln(5), \\ 2/5 & \text{si } x \in [-\ln(5), 0[, \\ (x + 6)/10 & \text{si } x \in [0, 2[, \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

- 1) Représentez graphiquement la fonction F .

Correction :



- 2) Quel est le support de la loi de X ? (autrement dit, quelles sont les valeurs prises par la fonction X).

Correction : Il faut simplement repérer les ensembles sur lesquels la fonction F est strictement croissante. Ici, le support est l'ensemble

$$\mathcal{S} =] - \infty, -\ln(5)] \cup [0, 2],$$

- 3) Ecrire la loi \mathbb{P}_X sous la forme $\alpha\mathbb{P}_X^{(1)} + (1 - \alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$ où $\alpha \in]0, 1[$, $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi à densité. Vous donnerez la valeur de α , l'expression de $\mathbb{P}_X^{(1)}$ ainsi que la densité de la loi $\mathbb{P}_X^{(2)}$.

Correction : Tout d'abord, pour trouver α , on somme les hauteurs des sauts de discontinuité. On trouve $\alpha = 3/5$. La loi discrète $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{5} \delta_{-\ln(5)} + \frac{1}{5} \delta_0 + \frac{1}{5} \delta_2 \right) = \frac{1}{3} (\delta_{-\ln(5)} + \delta_0 + \delta_2).$$

Enfin, la densité de $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est

$$f(x) = \frac{1}{1 - \alpha} F'(x) = \frac{5}{2} \exp(x) \mathbb{I}_{]-\infty, -\ln(5)[}(x) + \frac{1}{4} \mathbb{I}_{]0, 2[}(x).$$

On vérifie facilement que la fonction f est positive et s'intègre à 1.

- 4) Calculer $\mathbb{E}(|X|)$. La variable aléatoire X est-elle intégrable ? Si oui, calculer $\mathbb{E}(X)$.

Correction : On a

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_{\Omega} |X| d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X(x) = \alpha \int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X^{(1)}(x) + (1-\alpha) \int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X^{(2)}(x).$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X^{(1)}(x) = \frac{1}{3} (\ln(5) + 0 + 2) = \frac{2 + \ln(5)}{3}.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X^{(2)}(x) = \int_{\mathbb{R}} |x| f(x) dx = -\frac{5}{2} \int_{-\infty}^{-\ln(5)} x \exp(x) dx + \frac{1}{4} \int_0^2 x dx.$$

Or, en effectuant une intégration par partie,

$$\int_{-\infty}^{-\ln(5)} x \exp(x) dx = -\frac{1 + \ln(5)}{5}.$$

En conclusion,

$$\int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X^{(2)}(x) = \int_{\mathbb{R}} |x| f(x) dx = \frac{1 + \ln(5)}{2} + \frac{1}{2},$$

ce qui nous conduit à

$$\mathbb{E}(|X|) = \frac{2 + \ln(5)}{5} + \frac{1 + \ln(5)}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4 + 2 \ln(5)}{5} < \infty.$$

La variable aléatoire X est donc intégrable. Le calcul de $\mathbb{E}(X)$ est très similaire.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x) = \alpha \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X^{(1)}(x) + (1-\alpha) \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X^{(2)}(x).$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X^{(1)}(x) = \frac{1}{3} (-\ln(5) + 0 + 2) = \frac{2 - \ln(5)}{3}.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X^{(2)}(x) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \frac{5}{2} \int_{-\infty}^{-\ln(5)} x \exp(x) dx + \frac{1}{4} \int_0^2 x dx = -\frac{1 + \ln(5)}{2} + \frac{1}{2},$$

ce qui nous conduit à

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2 - \ln(5)}{5} - \frac{1 + \ln(5)}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2 - 2 \ln(5)}{5}.$$

Exercice 3 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = (2\mu_1 + 5\mu_2)/7$ avec

$$\mu_1 := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \delta_k,$$

et, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_2(A) = \int_A \exp(-x) \mathbb{I}_{[0, \infty[}(x) dx.$$

- 1) Calculer $\mu_1(\mathbb{R})$ et $\mu_2(\mathbb{R})$. En déduire que l'on a bien $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$.

Correction : Tout d'abord,

$$\mu_1(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1.$$

De plus

$$\mu_2(\mathbb{R}) = \int_0^{\infty} \exp(-x) dx = 1.$$

On a donc bien que $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 2/7 + 5/7 = 1$.

On note F la fonction de répartition de X .

- 2) Quelle est la valeur de $F(t)$ lorsque $t < 0$? Lorsque $t \in [0, 1[$?

Correction : Si $t < 0$, on a $F(t) = 0$. Si $t \in [0, 1[$,

$$F(t) = \frac{5}{7} \int_0^t \exp(-x) dx = \frac{5}{7} (1 - \exp(-t)).$$

- 3) Soit $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $t \in [j, j + 1[$. Donner, en fonction de t et j l'expression de $F(t)$.

Correction : On a

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{5}{7} (1 - \exp(-t)) + \frac{2}{7} \sum_{k=1}^j 2^{-k} = \frac{5}{7} (1 - \exp(-t)) + \frac{2}{7} (1 - 2^{-j}) \\ &= 1 - \frac{5}{7} \exp(-t) - \frac{2^{-(j-1)}}{7}. \end{aligned}$$

- 4) Calculer de deux manières différentes l'espérance $\mathbb{E}(X)$.

Correction :

Méthode 1 – On utilise le théorème de transfert pour obtenir

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x) = \frac{2}{7} \int_{\mathbb{R}} x d\mu_1(x) + \frac{5}{7} \int_{\mathbb{R}} x d\mu_2(x).$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mu_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \int_{\mathbb{R}} x d\delta_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-(k-1)}$$

En utilisant le résultat de l'exercice préliminaire, on a donc

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mu_1(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-1/2)^2} = 2.$$

De plus

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mu_2(x) = \int_0^{\infty} x \exp(-x) dx = 1.$$

En conclusion,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{4}{7} + \frac{5}{7} = \frac{9}{7}.$$

Méthode 2 – La variable aléatoire X étant positive, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt = \sum_{j=0}^{\infty} \int_j^{j+1} \left(\frac{5}{7} \exp(-t) + \frac{2^{-(j-1)}}{7} \right) dt \\ &= \frac{5}{7} + \frac{1}{7} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(j-1)} = \frac{5}{7} + \frac{1}{7} \frac{2}{1-1/2} = \frac{9}{7}. \end{aligned}$$

Exercice 4 – On considère la fonction mesurable $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = c \exp(-\sqrt{x}) \mathbb{I}_{[0, \infty[}(x).$$

où $c \in \mathbb{R}$.

- 1) Donner la valeur de c pour laquelle f est une densité. Si vous ne trouvez pas cette valeur, vous pourrez continuer l'exercice en donnant vos résultats en fonction de c .

Correction : Pour que f soit positive, il faut prendre $c > 0$. De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = c \int_0^{\infty} \exp(-\sqrt{x}) dx.$$

En posant $y = \sqrt{x}$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 2c \int_0^{\infty} y \exp(-y) dy = 2c.$$

Ainsi, il faut prendre $c = 1/2$ pour la fonction f s'intègre à 1.

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi \mathbb{P}_X absolument continue de densité f .

2) Donner l'expression de la fonction de répartition de X .

Correction : On doit calculer $F(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Evidemment, si $t < 0$, on a $F(t) = 0$. Si $t \geq 0$,

$$F(t) = c \int_0^t \exp(-\sqrt{x}) dx = 2c \int_0^{\sqrt{t}} y \exp(-y) dy.$$

En faisant une intégration par partie,

$$F(t) = 2c [-y \exp(-y)]_0^{\sqrt{t}} + 2c \int_0^{\sqrt{t}} \exp(-y) dy = 2c \left\{ 1 - \exp(-\sqrt{t})[1 + \sqrt{t}] \right\}.$$

En conclusion,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \exp(-\sqrt{t})[1 + \sqrt{t}] & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

3) Calculer de deux façons différentes l'espérance de X .

Correction : La variable aléatoire X étant positive, l'écriture $\mathbb{E}(X)$ a un sens. De plus

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x \exp(-x^{1/2}) dx = \int_0^{\infty} y^3 \exp(-y) dy = 6.$$

Une autre méthode consiste à utiliser la formule

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt,$$

qui est valable car la variable aléatoire X est positive. Il vient

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \exp(-\sqrt{t})[1 + \sqrt{t}] dt = 2 \int_0^{\infty} y \exp(-y)[1 + y] dy = 2(1 + 2) = 6.$$