

Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2025 - 2026

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Questions de cours –

- 1) Soit E un ensemble quelconque. Donnez la définition d'une tribu \mathcal{E} de parties de E .
- 2) Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable. Donnez la définition d'une mesure μ définie sur \mathcal{E} .
- 3) Soit $a \in E$ où E est muni de la tribu \mathcal{E} . Donnez la définition de la mesure de Dirac δ_a au point a . Pour une fonction $f : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable et bornée, quelle est la valeur de son intégrale de Lebesgue par rapport à la mesure δ_a ?
- 4) Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ une variable aléatoire. Donnez la définition de la loi de X .

Dans tous les exercices, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Exercice 1 – Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on considère une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E_n, \mathcal{P}(E_n))$ avec $E_n = \{0, 1, \dots, n\}$. La loi de X s'écrit

$$\mathbb{P}_X = \sum_{i=0}^n c_n \binom{n}{i} 2^{-i} \delta_i,$$

où $c_n > 0$ et $\binom{n}{i}$ est le coefficient binomial. On rappelle également la formule

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

- 1) Donnez, en fonction de n , l'expression de la constante multiplicative c_n assurant que $\mathbb{P}_X(E_n) = 1$. Vous pourrez vérifier que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}_X(\{1\}) = n2^{n-1}/3^n$.
- 2) Après vous être assuré de son existence, calculez l'espérance de X .
- 3) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = 2^X$?
- 4) Calculez l'espérance de Y . Vérifiez que $\mathbb{E}(Y) \neq 2^{\mathbb{E}(X)}$.

Exercice 2 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi \mathbb{P}_X telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ \ln(t) & \text{si } t \in [1, 3/2[, \\ 1/2 & \text{si } t \in [3/2, 2[, \\ \ln(t) & \text{si } t \in [2, 5/2[, \\ 1 & \text{si } t \geq 5/2. \end{cases}$$

- 1) Représentez graphiquement la fonction F . À titre indicatif, on donne les valeurs approchées suivantes : $\ln(3/2) \approx 0.405$, $\ln(2) \approx 0.693$ et $\ln(5/2) \approx 0.916$.
- 2) Quelles sont les propriétés que doit vérifier F pour être une fonction de répartition ?
- 3) Quelle est le support de la variable aléatoire X (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X) ?

- 4) Écrivez la loi \mathbb{P}_X sous la forme $\alpha\mathbb{P}_X^{(1)} + (1 - \alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$ où vous préciserez la valeur de α , l'expression de $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et la densité de la loi continue $\mathbb{P}_X^{(2)}$.
- 5) Après vous être assuré de son existence, calculez l'espérance de X de deux façons différentes. On rappelle qu'une primitive de $\ln(t)$ est $t(\ln(t) - 1)$.

Exercice 3 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi \mathbb{P}_X définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mathbb{P}_X(A) = \frac{1}{15}\delta_{-2}(A) + \frac{2}{15}\delta_0(A) + \int_A \frac{4}{3x^3}\mathbb{I}_{[1, \infty[}(x)dx + \frac{2}{15}\delta_2(A).$$

- 1) En admettant que \mathbb{P}_X est une mesure, montrez que c'est une probabilité.
- 2) Donnez la valeur de α telle que $\mathbb{P}_X = \alpha\mathbb{P}_X^{(1)} + (1 - \alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$ où $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi associée à une variable aléatoire discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi continue. Quelle est la densité de $\mathbb{P}_X^{(2)}$?
- 3) Donnez l'expression de la fonction de répartition de X et faites en une représentation graphique.

Exercice 4 – Pour tout $a > 2$ et $c > 0$, on considère la fonction

$$f_c(x) = \frac{c}{x^a}\mathbb{I}_{[1, \infty[}(x).$$

- 1) Quelle est la valeur c_0 pour laquelle f_{c_0} est une densité (justifiez votre réponse) ?
- Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi continue \mathbb{P}_X de densité f_{c_0} .
- 2) Donnez l'expression de la fonction de répartition de X .
 - 3) La variable aléatoire X est-elle intégrable ? Si oui, calculez son espérance.