Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2025 - 2026

Correction

Exercice 1 – Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on considère une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E_n, \mathcal{P}(E_n))$ avec $E_n = \{0, 1, \ldots, n\}$. La loi de X s'écrit

$$\mathbb{P}_X = \sum_{i=0}^{n} c_n \binom{n}{i} 2^{-i} \delta_i,$$

où $c_n > 0$ et $\binom{n}{i}$ est le coefficient binomial. On rappelle également la formule

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

1) Donnez, en fonction de n, l'expression de la constante multiplicative c_n assurant que $\mathbb{P}_X(E_n) = 1$. Vous pourrez vérifier que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}_X(\{1\}) = n2^{n-1}/3^n$.
Il faut que

$$\sum_{i=0}^{n} c_n \binom{n}{i} 2^{-i} = 1.$$

Or d'après le rappel, en prenant $a = 1/2$ et $b = 1$, on a

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{-i} = (1 + 1/2)^n = (3/2)^n.$$

Donc $c_n = (2/3)^n$. On vérifie bien que

$$\mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}(X = 1) = c_n \binom{n}{i} \frac{1}{2} = n \frac{2^{n-1}}{3^n}.$$

2) Après vous être assuré de son existence, calculez l'espérance de X.
Le support de la variable aléatoire X est E_n donc X est en particulier une variable aléatoire positive et inférieure à n. Donc $\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(X) \le n < \infty$. La variable aléatoire X est donc bien intégrable. On a en utilisant le rappel,

$$\mathbb{E}(X) = c_n \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} 2^{-i} = nc_n \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} 2^{-i} = \frac{nc_n}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 2^{-j} = \frac{nc_n}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{n}{3}.$$

3) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = 2^X$?
La variable aléatoire Y est évidemment discrète. Elle prend ses valeurs dans l'ensemble $\{2^i \mid i \in \{0, \ldots, n\}\}$ avec

$$\mathbb{P}(Y = 2^i) = \mathbb{P}(X = i) = c_n \binom{n}{i} 2^{-i}.$$

4) Calculez l'espérance de Y. Vérifiez que $\mathbb{E}(Y) \neq 2^{\mathbb{E}(X)}$.
On a, en appliquant le rappel avec $a = b = 1$,

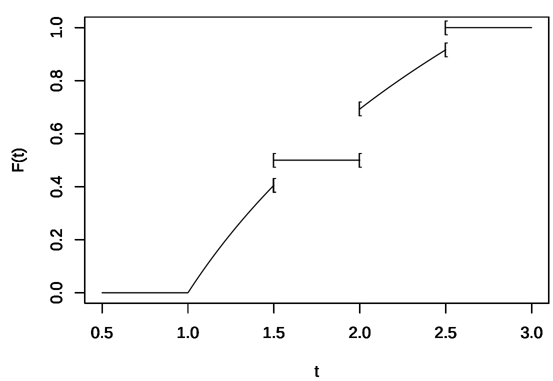
$$\mathbb{E}(Y) = c_n \sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i} 2^{-i} = c_n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n c_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Evidemment, $(4/3)^n \neq 2^{n/3}$.

Exercice 2 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ \ln(t) & \text{si } t \in [1, 3/2[, \\ 1/2 & \text{si } t \in [3/2, 2[, \\ \ln(t) & \text{si } t \in [2, 5/2[, \\ 1 & \text{si } t \geq 5/2. \end{cases}$$

1) Représentez graphiquement la fonction F. À titre indicatif, on donne les valeurs approchées suivantes : $\ln(3/2) \approx 0.405$, $\ln(2) \approx 0.693$ et $\ln(5/2) \approx 0.916$.



2) Quelles sont les propriétés que doit vérifier F pour être une fonction de répartition ?
Une fonction de répartition est une fonction croissante, de limite 0 en $-\infty$, 1 en $+\infty$ et continue à droite.

3) Quelle est le support de la variable aléatoire X (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X) ?
Le support de X est l'ensemble $]1, 3/2] \cup [2, 5/2]$.

4) Écrivez la loi $\mathbb{P}_X$ sous la forme $\alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$ où vous préciserez la valeur de α, l'expression de $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et la densité de la loi continue $\mathbb{P}_X^{(2)}$.
On trouve pour commencer la valeur de α (qui est le coefficient devant la loi discrète) en sommant la hauteur des sauts. On a donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right] + \left[\ln(2) - \frac{1}{2}\right] + \left[1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)\right] = 1 + \ln(2) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= 1 + 3\ln(2) - \ln(3) - \ln(5) \approx 0,3714. \end{aligned}$$

La loi discrète est donc

$$\mathbb{P}_X^{(1)} = \frac{1}{\alpha}\left(\left[\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]\delta_{3/2} + \left[\ln(2) - \frac{1}{2}\right]\delta_2 + \left[1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)\right]\delta_{5/2}\right).$$

Enfin, la densité de $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est

$$f(t) = \frac{1}{1-\alpha} F'(t) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{t} \mathbb{I}_{]1,3/2[\cup]2,5/2[}(t).$$

5) Après vous être assuré de son existence, calculez l'espérance de X de <u>deux façons</u> différentes. On rappelle qu'une primitive de $\ln(t)$ est $t(\ln(t)-1)$.
Tout d'abord, la variable aléatoire X est positive et inférieure à $5/2$. Donc $\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(X) \leq 5/2$. L'espérance existe donc bien.
<u>Première méthode</u> – On sait que $\mathbb{E}(X) = \alpha\mathbb{E}(X^{(1)}) + (1-\alpha)\mathbb{E}(X^{(2)})$ où $X^{(1)}$ est une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et $X^{(2)}$, une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X^{(2)}$. On a

$$\begin{aligned}\alpha\mathbb{E}(X^{(1)}) =& \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right] + 2\left[\ln(2) - \frac{1}{2}\right] + \frac{5}{2}\left[1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)\right] \\ =& \frac{9}{4} + 2\ln(2) - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0,7373.\end{aligned}$$

De plus,

$$(1-\alpha)\mathbb{E}(X^{(2)}) = \int_1^{3/2} dt + \int_2^{5/2} dt = 1.$$

En conclusion,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{13}{4} + 2\ln(2) - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1,7373.$$

<u>Seconde méthode</u> – La variable aléatoire X étant positive, on peut utiliser la formule

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty (1-F(t))dt = \int_0^1 dt + \int_1^{3/2}(1-\ln(t))dt + \int_{3/2}^2 \frac{1}{2}dt + \int_2^{5/2}(1-\ln(t))dt \\ &= \frac{9}{4} - \Big[\, t(\ln(t)-1)\Big]_1^{3/2} - \Big[\, t(\ln(t)-1)\Big]_2^{5/2} = \frac{13}{4} + 2\ln(2) - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right).\end{aligned}$$

Exercice 3 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mathbb{P}_X(A) = \frac{1}{15}\delta_{-2}(A) \; + \frac{2}{15}\delta_0(A) + \int_A \frac{4}{3x^3}\mathbb{I}_{[1,\infty[}(x)dx + \frac{2}{15}\delta_2(A).$$

1) En admettant que $\mathbb{P}_X$ est une mesure, montrez que c'est une probabilité.
Il suffit de vérifier que $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$. Or,

$$\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{4}{3}\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx + \frac{2}{15} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\Big[-\frac{x^{-2}}{2}\Big]_1^\infty = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

2) Donnez la valeur de α telle que $\mathbb{P}_X = \alpha\mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$ où $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi associée à une variable aléatoire discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi continue. Quelle est la densité de $\mathbb{P}_X^{(2)}$?
Le support de la loi $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est $\{-2, 0, 2\}$. On a

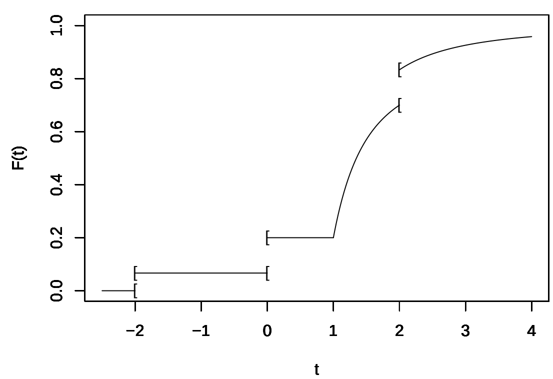
$$\alpha = \mathbb{P}_X(\{-2,0,2\}) = \mathbb{P}(X=-2) + \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3}.$$

Pour trouver la densité de F, on cherche la constance $c > 0$ telle que

$$c\int_{\mathbb{R}} \frac{4}{3x^3}\mathbb{I}_{[1,\infty[}(x)dx = 1.$$

On a
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{4}{3x^3}\mathbb{I}_{[1,\infty[}(x)dx = \frac{4}{3}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}dx = \frac{2}{3}.$$
Ainsi, $c = 3/2$. La densité est donc
$$f(x) = \frac{2}{x^3}\mathbb{I}_{[1,\infty[}(x).$$

3) Donnez l'expression de la fonction de répartition de X et faites en une représentation graphique.
Les points pour lesquels il y a un changement dans l'expression de F sont -2, 0, 1 et 2.
- Évidemment, si $t < -2$, $F(t) = 0$.
- De plus, si $t \in [-2, 0[$, $F(t) = 1/15$.
- Si $t \in [0, 1[$, $F(t) = 1/15 + 2/15 = 1/5$.
- Si $t \in [1, 2[$,
$$F(t) = \frac{1}{5} + \int_1^t \frac{4}{3x^3}dx = \frac{1}{5} + \frac{4}{3}\Big[-\frac{x^{-2}}{2}\Big]_1^t = \frac{1}{5} + \frac{2}{3}\Big[1 - \frac{1}{t^2}\Big].$$
- Enfin, si $t \geq 2$,
$$F(t) = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{3}\Big[1 - \frac{1}{t^2}\Big] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\Big[1 - \frac{1}{t^2}\Big].$$



Exercice 4 – Pour tout $a > 2$ et $c > 0$, on considère la fonction
$$f_c(x) = \frac{c}{x^a}\mathbb{I}_{[1,\infty[}(x).$$

1) Quelle est la valeur c_0 pour laquelle f_{c_0} est une densité (justifiez votre réponse) ?
La valeur c_0 est telle que
$$c_0 \int_1^{\infty} x^{-a}dx = 1.$$
Or,
$$\int_1^{\infty} x^{-a}dx = \frac{1}{a-1}.$$
Donc $c_0 = a - 1$.

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi continue $\mathbb{P}_X$ de densité f_{c_0}.

2) Donnez l'expression de la fonction de répartition de X.
   Posons $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$. Évidemment, si $t < 1$, $F(t) = 0$. Si $t \geq 1$,on a

$$F(t) = (a-1)\int_1^t x^{-a}dx = 1 - t^{1-a}.$$

3) La variable aléatoire X est-elle intégrable ? Si oui, calculez son espérance.
   La variable aléatoire X étant positive, il suffit de montrer que $\mathbb{E}(X) < \infty$. On a

$$\mathbb{E}(X) = (a-1)\int_1^\infty x^{1-a}dx = (a-1)\left[\frac{x^{2-a}}{2-a}\right]_1^\infty = \frac{a-1}{a-2} < \infty.$$

   Donc X est intégrable et son espérance est $(a-1)/(a-2)$.