Contrôle continu #2 de "Probabilités 4"

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2022 - 2023

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce sujet sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$**.**

Questions de cours

1) Rappeler la définition de la convergence en probabilité. De la convergence presque-sûre.

2) Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable. Qu'appelle-t-on une sous-tribu $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$?

3) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire intégrable et $\mathcal{A}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Rappeler les propriétés caractérisant l'espérance conditionnnelle $\mathbb{E}(X|\mathcal{A})$.

Exercice 1 – On considère un vecteur aléatoire $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ qui admet pour densité la fonction

$$f(x, y) := \frac{3}{4} \exp(-xy^{1/4}) \mathbb{I}_E(x, y),$$

avec $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$.

1) Calculer la densité de Y.

2) Vérifier que f est bien une densité.

3) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|Y)$.

4) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 2 – On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\}.$$

On introduit également la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = c\mathbb{I}_E(x, y)$ où $c \in \mathbb{R}$

1) Représenter l'ensemble E sur un dessin.

2) Donner la valeur de c pour que la fonction f soit une densité sur $\mathbb{R}^2$.

On considère à présent un vecteur aléatoire $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ qui admet la fonction f pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.

3) Calculer les densités de X et Y.

4) Calculer l'espérance de X et celle de Y.

5) Pour $y \in [0, 1]$, donner l'expression de la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.

6) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|Y)$.

Exercice 3 – Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On rappelle que si Y est une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{y_1, \ldots, y_n\}$ et si X est intégrable alors,

$$\mathbb{E}(X|Y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(Y = y_i)} \int_{\{Y=y_i\}} X d\mathbb{P} \right) \mathbb{I}\{Y = y_i\}.$$

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $T_n = X_2 + \ldots + X_n$.

1) Donner les lois de S_n et de T_n.

2) Calculer la probabilité de l'événement $\{X_1 = 1\} \cap \{S_n = 0\}$.

3) Si $i \in \{1, \cdots, n\}$, montrer que

$$\{X_1 = 1\} \cap \{S_n = i\} = \{X_1 = 1\} \cap \{T_n = k(i)\},$$

   où vous préciserez l'expression de $k(i) \in \{0, \cdots, n-1\}$ en fonction de i.

4) Montrer que $X_1 = \mathbb{I}_{\{X_1=1\}}$.

5) Déduire des questions précédentes que $i = 1, \cdots, n$,

$$\int_{\{S_n=i\}} X_1 d\mathbb{P} = p\mathbb{P}(T_n = i - 1).$$

6) En déduire que

$$\mathbb{E}(X_1|S_n) = \frac{S_n}{n}.$$

7) Montrer que l'on a bien $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_1|S_n)) = \mathbb{E}(X_1)$.