Contrôle continu #2 de "Probabilités 4"

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2022 - 2023

Correction

Exercice 1 – On considère un vecteur aléatoire $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ qui admet pour densité la fonction

$$f(x, y) := \frac{3}{4} \exp(-xy^{1/4}) \mathbb{I}_E(x, y),$$

avec $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$.

1) Calculer la densité de Y.
Si on note f_Y la densité de Y on a

$$f_Y(y) = \int_R f(x, y)dx = \frac{3}{4}\mathbb{I}_{[0,1]}(y) \int_0^\infty \exp(-xy^{1/4})dx.$$

En posant $t = xy^{1/4}$, on trouve

$$f_Y(y) = \frac{3}{4}y^{-1/4}\mathbb{I}_{[0,1]}(y) \int_0^\infty \exp(-t)dt = \frac{3}{4}y^{-1/4}\mathbb{I}_{[0,1]}(y).$$

2) Vérifier que f est bien une densité.
Il suffit de vérifier que $f_Y \geq 0$ et d'intégrale égale à 1.

3) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|Y)$.
On calcule pour commencer la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ pour tout $y \in [0, 1]$. On a

$$f_{X|Y=y}(x) = y^{1/4} \exp(-xy^{1/4})\mathbb{I}_{[0,\infty[}(x).$$

On en déduit que $\mathbb{E}(X|Y) = h(Y)$ avec pour tout $y \in [0, 1]$,

$$h(y) = \int_0^\infty xy^{1/4} \exp(-xy^{1/4})dx = y^{1/4} \int_0^\infty t \exp(-t)dt = y^{-1/4},$$

en ayant fait le changement de variable $t = xy^{1/4}$.

4) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.
On a donc

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)] = \frac{3}{4} \int_0^1 y^{-1/4}y^{-1/4}dy = \frac{3}{2}.$$

Exercice 2 – On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\}.$$

On introduit également la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = c\mathbb{I}_E(x,y)$ où $c \in \mathbb{R}$

1) Représenter l'ensemble E sur un dessin.
Dans le carré $[0,1]\times[0,1]$, c'est la partie située sous la première bissectrice.

2) Donner la valeur de c pour que la fonction f soit une densité sur $\mathbb{R}^2$.
Il faut tout d'abord que $c > 0$. De plus, il faut que l'intégrale de f soit égale à 1. Or

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dydx = c\int_0^1 \int_0^x dydx = c\int_0^1 xdx = \frac{c}{2}.$$

Il faut donc prendre $c = 2$.

On considère à présent un vecteur aléatoire $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ qui admet la fonction f pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.

3) Calculer les densités de X et Y.
On note f_X et f_Y les densités de X et Y. On a

$$f_X(x) = 2\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\int_0^x dy = 2x\mathbb{I}_{[0,1]}(x),$$

et

$$f_Y(y) = 2\mathbb{I}_{[0,1]}(y)\int_y^1 dx = 2(1-y)\mathbb{I}_{[0,1]}(y).$$

4) Calculer l'espérance de X et celle de Y.
On a

$$\mathbb{E}(X) = 2\int_0^1 x^2dx = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbb{E}(Y) = 2\int_0^1 y(1-y)dy = \frac{1}{3}.$$

5) Pour $y \in [0,1]$, donner l'expression de la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.
Pour tout $y \in [0,1]$,

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{1-y}\mathbb{I}_{[y,1]}(x).$$

6) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|Y)$.
On a $\mathbb{E}(X|Y) = h(Y)$ avec pour tout $y \in [0,1]$,

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y=y}(x)dx = \frac{1}{1-y}\int_y^1 x dx = \frac{1-y^2}{2(1-y)}.$$

Exercice 3 – Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On rappelle que si Y est une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{y_1, \dots, y_n\}$ et si X est intégrable alors,

$$\mathbb{E}(X|Y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(Y = y_i)} \int_{\{Y=y_i\}} X d\mathbb{P} \right) \mathbb{I}\{Y = y_i\}.$$

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $T_n = X_2 + \dots + X_n$.

1) Donner les lois de S_n et de T_n.
Par définition d'une loi binomiale, X suit une loi binomiale de paramètres n et p et Y suit une loi binomiale de paramètres $n-1$ et p.

2) Calculer la probabilité de l'événement $\{X_1 = 1\} \cap \{S_n = 0\}$.
Il est évident que si $X_1 = 1$ alors $S_n \geq 1$ donc $\{X_1 = 1\} \cap \{S_n = 0\} = \emptyset$ et ainsi

$$\mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \{S_n = 0\}) = 0.$$

3) Si $i \in \{1, \cdots, n\}$, montrer que

$$\{X_1 = 1\} \cap \{S_n = i\} = \{X_1 = 1\} \cap \{T_n = k(i)\},$$

où vous préciserez l'expression de $k(i) \in \{0, \cdots, n-1\}$ en fonction de i.
Si $X_1 = 1$ alors, pour que S_n soit égal à i, il faut que $T_n = i - 1$. On a donc

$$\{X_1 = 1\} \cap \{S_n = i\} = \{X_1 = 1\} \cap \{T_n = i - 1\}.$$

4) Montrer que $X_1 = \mathbb{I}_{\{X_1=1\}}$.
Comme X_1 suit une loi de Bernoulli, elle ne peut prendre que les valeurs 0 où 1. Ainsi X_1 peut s'écrire comme une indicatrice qui vaut 1 lorsque X_1 vaut 1.

5) Déduire des questions précédentes que pour tout $i = 1, \cdots, n$,

$$\int_{\{S_n=i\}} X_1 d\mathbb{P} = p\mathbb{P}(T_n = i - 1).$$

On a

$$\int_{\{S_n=i\}} X_1 d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{I}_{\{S_n=i\}}\mathbb{I}_{\{X_1=1\}} d\mathbb{P} = \mathbb{P}(\{X_1=1\}\cap\{T_n=i-1\})$$
$$= \mathbb{P}(\{X_1=1\}\cap\{T_n=i-1\}).$$

Or, X_1 et T_n sont deux variables aléatoires indépendantes donc,

$$\int_{\{S_n=i\}} X_1 d\mathbb{P} = \mathbb{P}(\{X_1=1\})\mathbb{P}(\{T_n=i-1\}) = p\mathbb{P}(\{T_n=i-1\}).$$

6) En déduire que
$$\mathbb{E}(X_1|S_n) = \frac{S_n}{n}.$$
La variable aléatoire S_n prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{0,\cdots,n\}$, on a d'après le rappel,

$$\mathbb{E}(X_1|S_n) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{\mathbb{P}(S_n=i)}\int_{\{S_n=i\}} X_1 d\mathbb{P}\right)\mathbb{I}_{\{i\}}(S_n).$$

Or,

$$\frac{1}{\mathbb{P}(S_n=i)}\int_{\{S_n=i\}} X_1 d\mathbb{P} = \frac{1}{\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}}p\binom{n-1}{i-1}p^{i-1}(1-p)^{n-i} = \frac{i}{n}.$$

Ainsi,
$$\mathbb{E}(X_1|S_n) = \sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}\mathbb{I}_{\{i\}}(S_n) = \frac{S_n}{i},$$
puisque les termes de la somme sont tous nuls sauf pour $i=S_n$.

7) Montrer que l'on a bien $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_1|S_n)) = \mathbb{E}(X_1)$.
On sait que $\mathbb{E}(X_1)=p$. De plus

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_1|S_n)) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{np}{n} = p.$$