

Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie
Année 2023 - 2024

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Questions de cours –

- 1) Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable. Rappeler la définition d'une sous-tribu \mathcal{A} de \mathcal{F} .
- 2) Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire. Que signifie « X est \mathcal{A} -mesurable » où \mathcal{A} est une sous-tribu de \mathcal{F} .
- 3) Donner la définition de la convergence presque-sûre.

Exercice 1 – Soit (X, Y) un vecteur aléatoire défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.

On suppose que la loi de (X, Y) est absolument continue de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = cy\mathbb{I}_{\Delta}(x, y),$$

où $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 1 \leq x + y \leq 2\}$ et c est une constante convenablement choisie.

- 1) Représentez l'ensemble Δ .
- 2) Préciser la valeur de c .
- 3) Quelle est la densité de la loi de Y ?
- 4) Donner la valeur de $\mathbb{E}(Y)$.
- 5) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid Y)$.
- 6) Donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 2 – Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que X et Y ont la même loi donnée pour tout $k \in E := \{0, \dots, 10\}$ par

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{11}.$$

- 1) Donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

On pose $Z := \min(X, Y)$. On rappelle que pour toute fonction $g : E \rightarrow E$ mesurable

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \frac{1}{11^2} \sum_{i=0}^{10} \sum_{j=0}^{10} g(i, j).$$

On admettra que pour deux variables aléatoires indépendantes U et V , on a $\mathbb{E}(U | V) = \mathbb{E}(U)$.

- 2) Sans faire de calcul, quelle est la valeur de $\mathbb{E}(Z | X = 0)$? En utilisant la question 1), quelle est la valeur de $\mathbb{E}(Z | X = 10)$? Justifier vos réponses.
- 3) Pour tout $k \in E$, donner l'expression de $\mathbb{E}(Z | X = k)$ en fonction de k .
- 4) En déduire l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(Z | X)$.

Exercice 3 – Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On suppose que pour tout $n \geq 1$, la loi de X_n est donnée pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ par $\mathbb{P}(X_n = k) = 1/(n+1)$.

- 1) Donner l'expression de la fonction de répartition F_n de la variable aléatoire X_n . On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_n(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t)$.
- 2) Montrer que X_n/n converge en loi vers une loi uniforme sur $[0, 1]$.
- 3) Soit $a > 1$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n^a} > \varepsilon\right) = \frac{n - \lfloor n^a \varepsilon \rfloor}{n+1},$$

si $n < \varepsilon^{1/(1-a)}$ et 0 sinon.

- 4) Qu'en déduisez vous quant à la convergence presque-sûre de X_n/n^a lorsque $a > 1$?